11. cvičení - teorie

22. 12. 2022

Věta 1 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** Nechť funkce f, g mají na prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ vlastní derivace a existuje $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Nechť platí jedna z následujících pdmínek:

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$,

(ii) $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$.

Potom existuje i $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a je rovna $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Průběh funkce

Věta 2 (nutná podmínka lokálního extrému)**.** Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ lokální extrém. Jeslitže existuje $f'(x_0)$, potom $f'(x_0) = 0$.

Věta 3 (Vztah znaménka derivace a monotonie funkce)**.** Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval. Necht' f je spojitá na J a v každém vnitřním boďe J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{Int} J$) má derivaci.

(i) Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je rostoucí na J.

(ii) Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je klesající na J.

(iii) Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je neklesající na J.

(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je nerostoucí na J.

Funkce f je *konvexní*, pokud má v každém bodě tečnu pod grafem. (např. funkce $y = x^2$ je konvexní)

Funkce f je *konkávní*, pokud má v každém bodě tečnu nad grafem. (např. funkce $y = -x^2$ je konkávní)

Věta 4 (druhá derivace a konvexita)**.** Nechť $a, b \in R^*, a < b$ a f má na intervalu (a, b) vlastní druhou derivaci.

(i) Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b).

(ii) Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b).

(iii) Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b).

(iv) Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konkávní na (a, b).

Definice 5. Nechť f je reálná funkce definovaná na nějakém okolí bodu ∞. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě ∞ *asymptotu* $ax+b$, jestliže $\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = 0$. Analogicky definujeme asymptotu v bodě $-\infty$.

Věta 6 (Tvar asymptoty)**.** Funkce f má v bodě ∞ asymptotu $ax + b$ právě tehdy, když $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b \in R$. Analogické tvrzení platí pro asymptotu v bodě $-\infty$

Postup vyšetřování průběhu funkce (dle doc. Zeleného):

1. Určíme **definiční obor** a obor **spojitost**i funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: **lichost**, **sudost**, **periodicita**.
3. Dopočítáme **limity v „krajních bodech** definičního oboru".
4. Spočteme první derivaci, určíme intervaly **monotonie** a nalezneme lokální a globální **extrémy**. Určíme obor hodnot. (Věta 3, Věta 2)
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je funkce **konvexní/konkávní**. (Věta 4)
6. Vypočteme **asymptoty** funkce. (Věta 6)
7. Načrtneme **graf** funkce.