4. cvičení - teorie

3. 11. 2022

Definice 1. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $L \in \mathbb{R}$. Řekneme, že L je *vlastní limita posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \epsilon.$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu ∞ (resp. $-\infty$), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n > K \text{ (resp. } < K).$$

Limity jsou jednoznačňe určené.

Věta 2 (O vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel s limitou $A \in \mathbb{R}$. Buď posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom už $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Věta 3 (Aritmetika limit)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel a mějme $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

- $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$, máli pravá strana smysl.
- $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$, máli pravá strana smysl.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, máli pravá strana smysl.

Věta 4 (Dva strážníci / Sendvič)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou tři posloupnosti reálných čísel splňující:

- $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N}\, n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$,
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A \in \mathbb{R}^*$,

potom je $\lim_{n\to\infty} c_n = A$.

Věta 5 (mizející a omezená)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel splňující:

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená,
- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$,

potom je $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Věta 6 (O posloupnosti s kladnými členy)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost kladných reálných čísel a $m \in \mathbb{N}$. Potom platí:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = A \iff \lim_{n\to\infty} {a_n}^m = A^m \iff \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{A}$

RŮSTOVÁ ŠKÁLA: (Čím jsou funkce víc vpravo, tím rychleji rostou)
$\ln^{\alpha} \ll n^{\beta} \ll a^n \ll n! \ll n^n$