

## 5. cvičení - teorie

10. 11. 2022

**Definice 1.** Necht'  $x \in \mathbb{R}$ . Potom číslo  $k \in \mathbb{Z}$  splňující  $k \leq x \leq k+1$  nazýváme *celou částí* čísla  $x$  a značíme  $\lfloor x \rfloor$  nebo  $[x]$ .

**Definice 2.** Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost reálných čísel a  $L \in \mathbb{R}$ . Řekneme, že  $L$  je *vlastní limita posloupnosti*  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \varepsilon.$$

Posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  má limitu  $\infty$  (resp.  $-\infty$ ), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n > K \text{ (resp. } < K \text{)}.$$

Limity jsou jednoznačně určeny.

**Věta 3** (O vybrané posloupnosti). Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost reálných čísel s limitou  $A \in \mathbb{R}$ . Buď posloupnost  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$  vybraná z posloupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Potom už  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = A$ .

**Věta 4** (Aritmetika limit). Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  a  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  jsou posloupnosti reálných čísel a mějme  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$ . Potom platí:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = A + B$ , máli pravá strana smysl.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$ , máli pravá strana smysl.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ , máli pravá strana smysl.

**Věta 5** (Dva strážníci / Sendvič). Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  a  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  jsou tři posloupnosti reálných čísel splňující:

- $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \in \mathbb{R}^*$ ,

potom je  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$ .

**Věta 6** (mizející a omezená). Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  a  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  jsou posloupnosti reálných čísel splňující:

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je omezená,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ,

potom je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$ .

**Věta 7** (O posloupnosti s kladnými členy). Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost kladných reálných čísel a  $n \in \mathbb{N}$ . Potom platí:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^m = A^m \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{A}$ .

**Další užitečná fakta:**

- RŮSTOVÁ ŠKÁLA:  $\ln^\alpha n \ll n^\beta \ll b^n \ll n! \ll n^n$ , kde  $a \in (0, 1), b > 1$
- $A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + A^2B^{n-3} + AB^{n-2} + B^{n-1})$
- $(A + B)^n = A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \binom{n}{2}A^{n-2}B^2 + \dots + B^n$
- $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$  (2. cvičení)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$  (dokázáno v příkladu 6)
- platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$  pro  $a > 1$  (dokázáno v příkladu 6)
- platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$  pro  $a \in (0, 1)$  (dokázáno v příkladu 6)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$  pro  $a > 0$  (dokázáno v příkladu 6)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x_n})^{x_n} = e$ , pro posloupnost  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .
- $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$
- $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$