

9. cvičení - teorie

8. 12. 2022

Definice 1. Funkce f je *spojitá v bodě* $c \in \mathbb{R}$, pokud $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Fakt 2. Polynom je spojitá funkce.

Věta 3 (Limita složené funkce). Buď $c, D, A \in \mathbb{R}^*$, a jsou f a g funkce. Necht' platí, že $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = D$ a $\lim_{x \rightarrow D} f(x) = A$. Necht' platí alespoň jedna z podmínek:

$$(P) \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in P(c, \eta) : g(x) \neq D,$$

$$(S) \quad f \text{ je spojitá v } D.$$

Pak platí $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = A$.

Věta 4 (Heine). Necht' $c, A \in \mathbb{R}^*$ a pro reálnou funkci f platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$. Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků z definičního oboru funkce f taková, že $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq c$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Potom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Fakt 5 (Známé limity). Platí, že:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Další užitečné limity odvozené od známých limit:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= 1 & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} &= 1 & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1}{2} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{x-1} &= 1 & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} &= 1 \end{aligned}$$

Co se může hodit:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Necht' } x > 0, \text{ pak } \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\pi}{2} \\ \bullet \sin x - \sin a &= 2 \cdot \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \\ \bullet a^y &= e^{y \log(a)} \end{aligned}$$