11. cvičení - výsledky

22. 12. 2022

Příklad 1.

a. $\frac{152}{37}$

b. 1

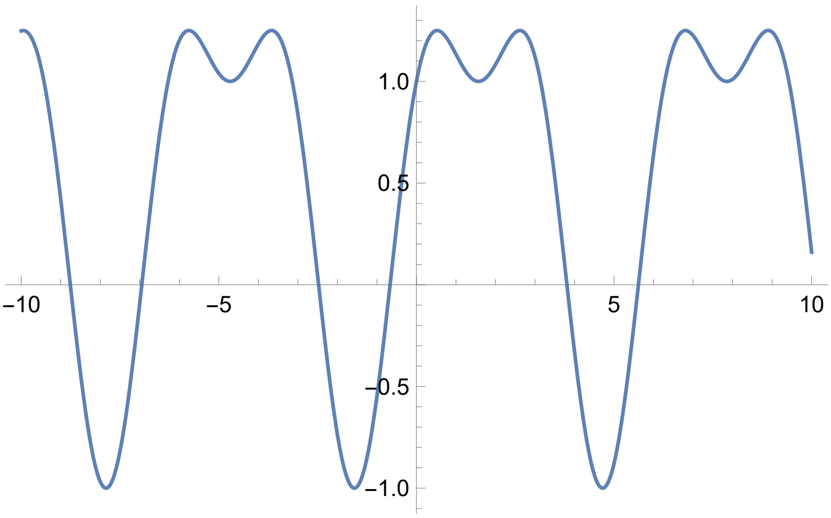
c. $\frac{1}{6}$

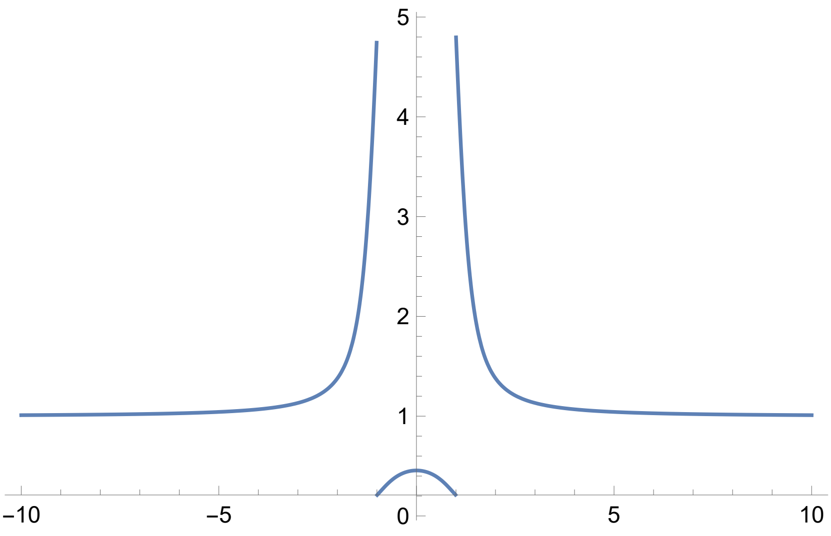
d. $\frac{-1}{3}$

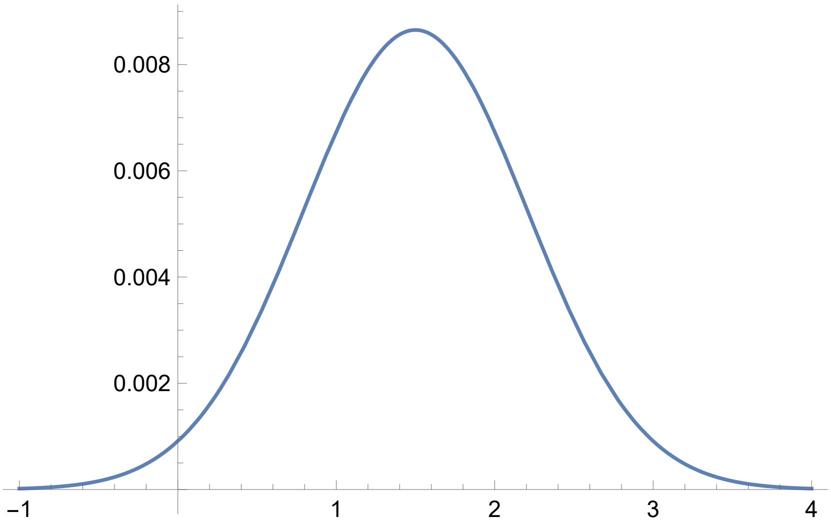
e. 0

f. 1

Příklad 2.

a. 

b. 

c. 

d. $D(f) = [-1, \infty)$

f je na celém $D(f)$ spojitá jakožto složení spoijtých funkcí.

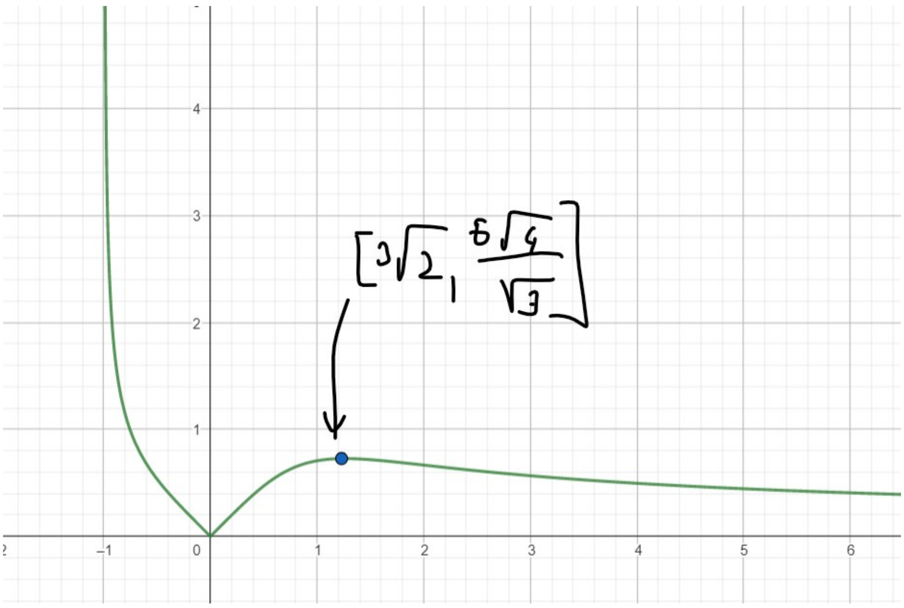
$\lim_{x\to -1+} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to \infty} f(x) = 0$

Tedy f je na $\left(-1, \sqrt[3]{2}\right)$ rostoucí a na $\left(\sqrt[3]{2}, \infty\right)$ klesající.

Lokální maximum je bod $\left[\sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt{3}}\right]$.

Funkce f je tedy na intervalu $(-1, 0)$ konvexní a na intervalu $(0, \infty)$ konkávní.



e. $D(f) = \mathbb{R}$

f je na celém $D(f)$ spojitá jakožto složení spoijtých funkcí.

f je π-periodická.

Na $(0, \pi)$ platí následující.

$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$

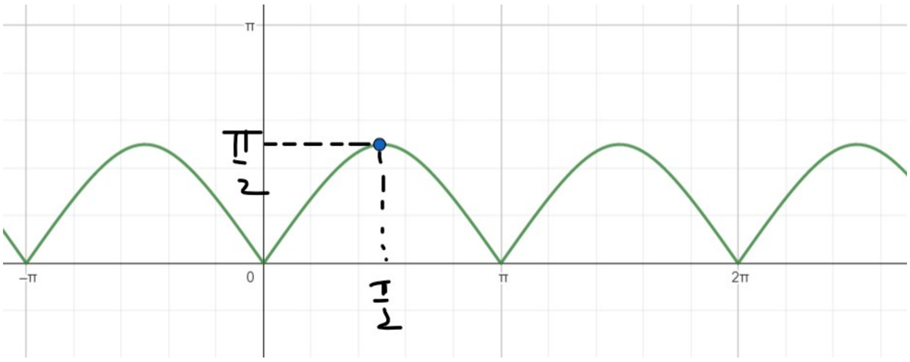
$\lim_{x \to \pi-} f(x) = 0$

f je na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí a na $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ klesající.

Lokálního maxima nabývá v bodě $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

f je na $(0, \pi)$ konkávní.

Aplikujeme-li i periodicitu, dostáváme následující graf.



f. Viz vzorové řešení.

Příklad 3.

(a) $f' = \begin{cases} 1, & x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi), k \in \mathbb{Z} \\ \frac{4\cos x}{\sin^2 x + 1} + 1, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
Dále pak $f'_+(2k\pi) = 5,\ f'_-(2k\pi) = 1,\ f'_+((2k+1)\pi) = 1,\ f'_-((2k+1)\pi) = -3.$

(b) $f' = \begin{cases} 0, & x \in \left(-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \\ -\sin x, & x \in \left(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

- $f'_-(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = \sqrt{3}/2,\ f'_+(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = 0,$
- $f'_-(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = 0,\ f'_+(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2,$
- $f'_-(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2,\ f'_+(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi) = 0,$
- $f'_-(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi) = 0,\ f'_+(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi) = \sqrt{3}/2.$

(c) $f' = \frac{2|x|}{x^3 + x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f'_-(0) = -2,\ f'_+(0) = 2$

(d) $f'(x) = \begin{cases} e^{x-1}(2x + x^2), & x < 1, \\ e^{1-x}(2x - x^2), & x > 1, \end{cases}\ f'_-(1) = 3, f'_+(1) = -1.$

(e) $f' = \frac{\sqrt{2}}{(\sin x + \cos x)^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-\pi/4 + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\},$
A jednostranné derivace $f'_-(-\pi/4 + k\pi) = \infty,\ f'_+(-\pi/4 + k\pi) = -\infty.$

(f) $f' = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f'_-(0) = -1,\ f'_+(0) = 1$

(g) $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 \cdot (1+x^2)^2}}, x \neq 0.$
Jednostranné derivace $f'_-(0) = -\sqrt{2}, f'_+(0) = \sqrt{2}$.

(h) $f'(x) = 2x\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), x \neq 0$
V nule z definice $f'(0) = \lim_{x\to 0} x(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}) = 0$.

(i) $f'(x) = x^{x^2} \cdot (2x \log x + x)$.

(j) $f'(x) = \begin{cases} -\sin x, & x \in (0,1), \\ -2x\sin x^2, & x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty). \end{cases}$
Dále $f'(0) = 0$ a $f'_-(1) = -\sin 1,\ f'_+(1) = -2\sin 1$

(k) $f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}), \\ -2x, & x \in (0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}), \\ 2(x-1), & x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty). \end{cases}$
Pak spočteme jednostranné derivace:

- $f'_-(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) = 2 - 2\sqrt{5},\ f'_+(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,
- $f'_-(\frac{3+\sqrt{5}}{2}) = 1,\ f'_+(\frac{3+\sqrt{5}}{2}) = 1 + \sqrt{5}$,
- $f'_-(0) = -2,\ f'_+(0) = 0$.

(l) $f'(x) = \begin{cases} \frac{2\tan x \frac{1}{\cos^2 x}}{1+\tan^4 x}, & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$