Problém 1

Existuje spojité surjektivní zobrazení $f : [0,1] \to [0,1]^2$ („Peanova křivka“) takové, že všechny množiny $f([a,b])$, $0 \le a < b \le 1$, jsou konvexní ?

Komentář

V práci

[J. Pach, C.A. Rogers: Partly convex Peano curves, Bull. London Math. Soc. 15 (1983), 321–328 (je na internetu)]

je sestrojena f, pro kterou podmínka platí, pokud $a = 0$ nebo $b = 1$. Před pokusem o řešení je vhodné se seznámit s

[A. Vince, J. Pach, C.A. Rogers; Problems and Solutions: Solutions of Elementary Problems: E3139. Amer. Math. Monthly 95 (1988), no. 8, 765–767 (je na internetu v JSTORu)].

L.Z., 19.10.09

Problém 2a

Pro funkci $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ nechť $C(f) := \{x \in [0,1] : \ f'(x) = 0\}$ je množina kritických bodů funkce f a nechť $CV(f) := f(C(f))$ je množina kritických hodnot funkce f. Pro $n \in \mathbb{N}$ charakterizujte systém množin

$$S_{dif_n} := \{CV(f) : \ f \ \text{ má } \ n-\text{tou derivaci na } \ [0,1]\}.$$

Komentář

Je možné, že řešení je známo, ale já jsem je v literatuře nenalezl. Je známo, že $S_{C^1} := \{CV(f) : \ f \in C^1[0,1]\}$ je systém všech kompaktních množin nulové míry. Charakterizace systémů $S_{C^s} := \{CV(f) : \ f \in C^s[0,1]\}, \ s \in (0,\infty]$ je také známa, ale složitější; viz

[S.M. Bates, A. Norton: On sets of critical values in the real line, Duke Math. J. 83 (1996), 399–413 (v knihovně MFF není, MÚ AV ano, mám kopii)].

Také nevím, zda jsou známy (asi snadnější) charakterizace analogicky definovaných systémů $S_{libov.}$, $S_{spoj.}$, $S_{lipsch.}$

Problém 2b

Nechť $k \ge n$ jsou přirozená čísla. Charakterizujte systém
$S_{n,k} := \{CV(f) : \ f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, f má omezený nosič$\}$,
kde definice $CV(f)$ je analogická jako výše.

Komentář

Ve výše uvedeném článku je uvedena hypotéza k tomuto problému, převzatá z nepublikovaného preprintu Y. Yomdina. Autoři tam píší, že se k problému vrátí, ale zatím o něm nic nepublikovali. Zdá se, že v preprintu

[A Ainouline: Necessary and sufficient condition of Morse-Sard theorem for real valued functions, Arxiv preprint math/0405012, 2004 (lze stáhnout z Arxivu)]

jsou charakterizovány množiny, které jsou částí některé množiny z $S_{n,k}$.

L.Z., 19.10.09

Problém 3

The maximal operator on $\mathbb{R}$ is defined on integrable functions by $Mf(x) = \sup_{r>0}(2r)^{-1}\int_{x-r}^{x+r}|f(y)|\,dy$. Let $\bigvee g$ denote the usual total variation of a function $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Does there exist a constant C such that $\bigvee(Mf) \le C\bigvee f$ whenever $f \ge 0$ has compact support? As a modification of this problem we may assume in addition that f is absolutely continuous. Then it would be also interesting to know whether Mf is also locally absolutely continuous.

Jan Malý, 22.10.09

Problém 4

(Viz str. 115 článku M. Elekes, T. Keleti, Borel sets which are null or non-σ-finite for every translation invariant measure, Adv. Math. 201 (2006), no. 1, 102–115.)

Řekneme, že borelovská množina $B \subset \mathbb{R}$ *je měřená* (is measured), jestliže existuje translačně invariantní míra μ definovaná na nějaké σ-algebře obsahující všechny borelovské množiny taková, že $\mu(B) > 0$ a restrikce μ na B je σ-konečná míra.

a) Je sjednocení dvou měřených množin měřená množina ?

b) Je množina Liouvilleových čísel sjednocením konečně (resp. spočetně) mnoha měřených množin ?

c) Je každá neprázdná borelovská $B \subset \mathbb{R}$ sjednocením konečně (resp. spočetně) mnoha měřených množin ?

L.Z., 4.12.2009

Problém 5

(viz. Remark 1.3. 1) z článku O. Kurka, On Borel classes of sets of Fréchet subdifferentiability, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 55 (2007), 201–209.)

Nechť f je spojitá reálná funkce na $\mathbb{R}^2$. Je množina $S(f)$ všech bodů fréchetovské subdiferencovatelnosti funkce f nutně typu $G_{\delta\sigma\delta}$?

L.Z., 4.12.2009

Problém 6

Nechť X je Banachův prostor a $f : [a,b] \to X$. Pak limita

$$md(f,x) := \lim_{t\to 0} \frac{\|f(x+t) - f(x)\|}{|t|}$$

se nazývá *metrická derivace* f v bodě x. Pokud $md(f,x)$ existuje a

$$\|f(y) - f(z)\| - md(f,x)|y-z| = o(|y-x| + |z-x|), \qquad (y,z) \to (x,x),$$

řekneme, že f je *metricky diferencovatelná* v x.

Otázka: Nechť f je lipschitzovská. Nechť A je množina bodů $x \in [a,b]$, ve kterých f má metrickou derivaci, ale není metricky diferencovatelná. Je množina A nutně 1. kategorie (resp. dokonce σ-pórovitá)?

Komentář: Podobné otázky (ale tato ne) jsou zkoumány v práci J. Duda, O. Maleva, Metric derived numbers and continuous metric differentiability via homeomorphisms, in: Banach spaces and their applications in analysis, 307–330, Walter de Gruyter, Berlin, 2007 (preprint je v ArXivu). (O této práci referoval na semináři M. Koc.)

Množina A je míry nula, protože každá lipschitzovská f je metricky diferencovatelná s.v. (viz. B. Kirchheim, Rectifiable metric spaces: local structure and regularity of the Hausdorff measure. Proc. Amer. Math. Soc. 121 (1994), no. 1, 113–123).

L.Z., 4.12.2009

Problém 7

Je množina křivkově souvislých kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^2$ typu Σ^1_2 (tj. projekcí koanalytické množiny podle nějakého polského prostoru) v prostoru kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^2$?

Poznámka. Výsledek, že uvedená množina je Π^1_2-úplná, pokud nahradíme $\mathbb{R}^2$ prostorem $\mathbb{R}^n$ s $n \geq 3$ dokázali Ajtai a Becker. Výsledek, že množina souvislých kontinuí v rovině je typu Π^1_2 a že není Π^1_1 ani Σ^1_1 dokázali Ajtai a Becker, resp. Darji. (Tyto informace s odkazy viz přehledový článek A. Marcone: Complexity of sets and binary relations in continuum theory: a survey a zčásti též knihu A.S. Kechris: Classical Descriptive Set Theory, vyd. 1994, str. 317-318).

Zapsal P. Holický, 22.10.2010

Problém 8

Existuje pro každý spočetný ordinál α spočetný ordinál $\beta(\alpha)$ tak, že platí:

Pokud lze podmnožinu $\mathbb{R}^2$ napsat ve tvaru $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \times B_n$, A_n, B_n jsou borelovské a M je aditivní borelovské třídy α, pak ji lze zapsat ve tvaru $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n \times B'_n$, kde $A'_n, B'_n \subset \mathbb{R}$ jsou borelovské množiny aditivní třídy $\beta(\alpha)$.

Poznámka. Jde o problém vyslovený D. Lecomtem. Ten též upozornil, že pokud nahradíme spočetná sjednocení konečnými, pak má stejná otázka kladnou odpověď.

V tuto chvíli nevím, zda vypuštění předpokladu borelovskosti množin A_n, B_n by na problému něco změnilo.

Zapsal P. Holický, 22.10.2010

Problém 9

Nechť $\mathcal{B}$ je systém podmnožin úplného metrického prostoru, který je bodově spočetný a borelovsky-aditivní, tj. každý podsystém $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ má borelovské sjednocení $\bigcup \mathcal{C}$. Existuje pak σ-diskrétní zjemnění systému $\mathcal{B}$, které je pokrytím $\bigcup \mathcal{B}$?

Jde o Hansellův problém, ke kterému existuje pozitivní řešení ve speciálním případě, kdy "borelovské" nahradíme typem $F_{\sigma\delta}$. To řešili J. Spurný a M. Zelený ve svém článku Additive families of low Borel class and Borel measurable selectors, to appear in Canadian Mathematical Bulletin. Tam lze nalézt informace o případech pro G_δ a F_σ, které dříve řešili Hansell, resp. Spurný. Pozitivní odpověď pro případ systémů $G_{\delta\sigma}$-aditivních by tedy byl nový výsledek. Negativní odpověď pro případ analyticky-aditivních systémů za dodatečných množinových předpokladů ukázal Hansell.

Zapsal P. Holický, 22.10.2010