# 1 Doporučené ulohy – 1. série

**1** Dokažte, že existuje otevřená podmnožina roviny $V$ obsahující bod $(1,1)$ taková, že množina
$$\{(x,y):\ x^3+y^3-2xy=0\}\ \cap V$$
je grafem nějaké funkce $f$, která je třídy $C^2$ na nějakém okolí bodu 1. Spočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$.

**2** Dokažte, že množina
$$\{(x,y):\ e^y+\ln x+xy\ =\ 0\}$$
je grafem nějaké funkce $f$, která je třídy $C^2$ na $(0,\infty)$. Dále
a) vypočtěte nulový bod $x_0$ funkce $f$ a $f'(x_0)$;
b)* vypočtěte limity $f$ v nekonečnu a v nule zprava;
c)* dokažte, že $f$ nabývá absolutního minima právě v jednom bodě.

**3** Uvažujme (Descartesův list) $D=\{(x,y):\ x^3+y^3-2xy=0\}$. Dokažte toto:
a) $D\cap\{(x,y):x<0\}$ je grafem funkce $f$, která je třídy $C^\infty$ na $(-\infty,0)$;
b)* $f$ je klesající a $H_f=(0,\infty)$;
c) existuje $a>0$, pro které je množina $D\cap\{(x,y):x\geq 0\}$ sjednocením grafů tří funkcí $f_1,f_2,f_3$ takových, že $f_1$ je definovaná na $[0,\infty)$, $f_2$ a $f_3$ na $[0,a]$ a $f_1<f_2\leq f_3$ na $(0,a]$;
d) funkce $f_1,f_2,f_3$ jsou jednoznačně určeny a každá je třídy $C^\infty$ na vnitřku svého definičního oboru.

Dále
e)* dokažte, že $f_1,f_2,f_3$ jsou spojité a vyšetřete jejich suprema a infima.

**4** Dokažte, že existuje otevřená množina $V\subset\mathbb{R}^3$ obsahující bod $(3,-2,2)$ taková, že množina
$$\{(x,y,z)\in V: z^3-xz+y=0\}$$
je grafem nějaké funkce $z=z(x,y)$. Vypočtěte tečnou rovinu ke grafu funkce $z$ v bodě $(3,-2,2)$ a $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(3,-2)$.

**5** Nechť funkce $z=z(x,y)$ je třídy $C^1$ na nějakém otevřeném okolí $U$ bodu $(x_0,y_0)$ a splňuje na něm rovnici
$$z=x+\operatorname{arctg}\frac{y}{z-x}.$$

(a) Vyjádřete $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ pomocí $x, y, z(x,y)$ na $U$.
(b)* Dokažte, že pro každý bod $(x_0, y_0)$, $y_0 > 0$, existuje $U$ a $z(x,y)$ s výše uvedenými vlastnostmi.

***6** Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ je jednoduchý kořen rovnice $n$-tého stupně

$$P(x) = a_0^* x^n + a_1^* x^{n-1} + \cdots + a_n^* = 0, \quad a_i^* \in \mathbb{R}.$$

Dokažte, že existují $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ taková, že pokud

$$|a_i - a_i^*| < \delta, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

pak má rovnice $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ v $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ právě jeden kořen $x = x(a_1, \ldots, a_n)$. Vypočtěte $\frac{\partial x}{\partial a_i}(a_0^*, a_1^*, \ldots, a_n^*)$.

***7** Na základě předchozího příkladu vypočtěte přibližně (bez důkazu existence a odhadu chyby) kořen rovnice

$$0,99\, x^3 + 1,02\, x - 10 = 0.$$

(Nahraďte vhodnou diferenci funkce $x(a_0, a_1, a_2, a_3)$ v bodě $(1, 0, 1, -10)$ příslušným diferenciálem.)

**8** Dokažte, že existují funkce $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, pro které platí $u(1,2) = 0$, $v(1,2) = 0$, které na nějakém okolí $U$ bodu $(1,2)$ splňují rovnice

$$xe^{u+v} + 2uv = 1, \qquad ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x,$$

a jsou na $U$ třídy $C^1$. Vypočtěte diferenciály $du(1,2)$, $dv(1,2)$.

**9** (Příklad řešený v K2.) Dokažte, že existují funkce $z(x,y)$, $t(x,y)$, pro které $z(1,-1) = 2$, $t(1,-1) = 0$, a které splňují na nějakém okolí bodu $(1,-1)$ rovnice

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 = 0, \qquad x + y + z - t - 2 = 0.$$

Vypočtěte parciální derivace druhého řádu funkce $z(x,y)$ v bodě $(1,-1)$.

# 2 Doporučené ulohy – 2. série

**10** Vyšetřete, zda následující množiny jsou otevřené nebo uzavřené.

*a)* $\{(x,y) : x^2 < \sin(x+y^3)\}$ v $\mathbb{R}^2$.
*b)* $\{(x,y,z) : x+y+z = x\cos y,\quad xyz \le x^2+y^2\}$ v $\mathbb{R}^3$.
*c)* $\{(x,y) : x^3y + xy^2 \le 5,\quad xy < x^2+y^2+1\}$ v $\mathbb{R}^2$.
*d)* $\{(x,y,z) : x^2y \le \arcsin(x+y^3)\}$ v $\mathbb{R}^3$.
*e)* $\{(x,y) : x^2y < \arcsin(x+y^3)\}$ v $\mathbb{R}^2$.
*f)* $\{(x,y) : 6 - \arccos x < \arcsin(x+y^3)\}$ v $\mathbb{R}^2$.

**11** Převeďte do polárních souřadnic $(r,\alpha)$ rovnici $x\dfrac{\partial u}{\partial y} - y\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

Výsledek použijte k nalezení jednoho nekonstantního řešení původní rovnice na celém $\mathbb{R}^2$.

**12** Převeďte do polárních souřadnic Laplaceovu rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

**13** Přepište výraz

$$F = y^2 z_{xx} - 2xyz_{xy} + x^2 z_{yy} - xz_x - yz_y$$

do polárních souřadnic $r, \alpha$.

V následujících úlohách vypočtěte $S = \sup\{f(z) : z \in M\}$ a $I = \inf\{f(z) : z \in M\}$. Dále vyšetřete, zda a kde $f$ tyto hodnoty nabývá.

**14** $f(x,y) = x^2 - xy + y^2,\quad M = \{(x,y) : |x| + |y| \le 1\}$.

**15** $f(x,y,z) = 10z + x - y,\quad M = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1, x+y \ge 0\}$.

**16** $f(x,y,z) = xyz,\quad M = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, x+y+z = 0\}$.

**17** $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y},\quad M = \{(x,y) : \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{y^2} = 1\}$.

**18** $f(x,y,z) = (x+y+z)e^{-(x+2y+3z)},\quad M = \{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$.

**19** $f(x,y) = y$, $M = \{(x,y) : x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$. ($M$ je část tzv. Descartesova listu).

**20** $f(x,y) = x + y$, $M = \{(x,y) : x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$.

**21** $f(x,y) = xy$, $M = \{(x,y) : (x^2 + y^2)^2 = Kxy\}$, $K > 0$.

**22** $f(x,y,z) = y^2 + 4z^2 - 4yz - 2xz - 2xy$, $M = \{(x,y,z) : 2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1\}$.

***23** Nechť $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ je reálná symetrická matice. Vyšetřete extrémy kvadratické formy $Q(x) = (Ax, x)$ na jednotkové eukleidovské sféře $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_e = 1\}$. Z výsledku odvoďte, že $A$ má alespoň jedno vlastní číslo.

***24** Dokažte, že funkce $f(x,y,z) = x + y + z$ nabývá svého maxima na (Vivianiho křivce) $M = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 = x\}$ v bodě $(x_0, y_0, z_0)$, kde $z_0$ je algebraické číslo.

***25** V rovině je dán trojúhelník $ABC$. Hledejme bod $P$, pro který je minimální veličina

$$\rho(P,A) + \rho(P,B) + \rho(P,C).$$

a) Dokažte, že aspoň jeden takový bod $P$ existuje a může to být pouze vrchol trojúhelníku $ABC$ nebo bod, z kterého je vidět všechny strany pod stejným úhlem.
b) ** Proveďte úplnou diskusi problému.

**26** Pomocí teorie vázaných extrémů dokažte:
a) Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem $n$ nezáporných čísel

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

b) * Hölderovu nerovnost

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

kde $a_i \geq 0,\ x_i \geq 0,\ p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

# 3 Doporučené ulohy – 3. série

**27** Napište Taylorův polynom 2. řádu funkce $f(x,y) = x^y$ v bodě $(1,1)$.

**28** Vyšetřete lokální extrémy funkcí

a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2;$

b) $f(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}, \quad x > 0,\ y > 0;$

c) $f(x,y) = (x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}.$

**29** Zjistěte, zda lokální extrémy z předchozího příkladu jsou extrémy absolutní.

**30** Dokažte, že funkce $f(x,y) = (1 + e^y)\cos x - y\cos y$ má lokální maximum v nekonečně mnoha bodech a lokální minimum v žádném bodě.

**31** Dokažte, že funkce $f(x,y) = (x - y^2)(2x - y^2)$ má v bodě $(0,0)$ lokální minimum vzhledem ke každé přímce procházející bodem $(0,0)$, ale nemá v bodě $(0,0)$ lokální extrém.

# 4 Doporučené ulohy – 4. série

Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí.

**32** $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ na $(0,1)$.

**33** $f_n(x) = x^{2n} - x^{3n}$ na $(0,1)$.

**34** $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ na $\mathbb{R}$.

**35** $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$ na $(0,\infty)$.

***36** $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$ na $\mathbb{R}$.

***37** $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ na $\mathbb{R}$.

Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci následujících funkčních řad.

**32** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$ na $\mathbb{R}$.

**33** $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right)$ na $\mathbb{R}$.

**34** $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}$ na $\mathbb{R}$.

**35** $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$ na $(0,\infty)$.

***36** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ na $(0,2\pi)$.

**37** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ na $(-1,\infty)$.

**38** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$ na $(0,\infty)$.

**39** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \operatorname{arctg}(nx+n)$ na $(0,2\pi)$.

**32** Nechť (Dirichletova) řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$, $a_n \in \mathbb{R}$,
konverguje pro $x = x_0 \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pak tato řada konverguje stejnoměrně na intervalu $[x_0,\infty)$.

# 5 Doporučené ulohy – 5. série

**33** Dokažte, že funkce
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$
má spojitou derivaci na $\mathbb{R}$ a spojitou druhou derivaci na $(0, 2\pi)$.

**34** Dokažte, že Riemannova funkce zeta
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$
je třídy $C^\infty$ na $(1, \infty)$.

**35** Nechť $p, q \geq 0$. Položme
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p + x^2 n^q}.$$
Dokažte, že

a) $f$ je spojitá na $(0, \infty)$, je-li $\max(p, q) > 1$ a

b) $f$ je spojitá na $\mathbb{R}$, je-li $p + q > 2$ nebo $p > 1$.

c)* Najděte nutnou a postačující podmínku pro spojitost $f$ na $\mathbb{R}$.

**36** Ve kterých bodech mají derivaci funkce

a) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n + x}$; b) $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}$ ?

**37** Dokažte, že

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^2 x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{1 + x^n} \frac{x^n}{n} = \frac{\ln 2}{2}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1-} (1 - x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{1 - x^{2n}} = \frac{\ln 2}{2}$.

Pomocí Abelovy věty sečtěte následující řady.

**38** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n + 1}$. **39** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2}$.

**40** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{2^n}$.

***41** $1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6} + \dots$

***42** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$.

***43** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n}$.

# 6 Doporučené ulohy – 6. série

**38** Kterými body roviny prochází právě jedno maximální řešení rovnice

$$xy' - y = 0?$$

**39** Najděte všechna maximální řešení rovnice $3y' = 5\sqrt[5]{y^2}$, pro která $y(-2) = -1$ a

a) $y(0) = 1/2$; b) $y(0) = 2$; c) $y(0) = 0$.

**40** Pro rovnici

$$y' = \frac{\cos x}{e^y}$$

a) najděte maximální řešení s $y(0) = 0$;

b) popište množinu bodů roviny, kterými prochází řešení definované na celé přímce.

**41** Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y'(2 - e^x) = -3e^x \operatorname{tg} y \cos^2 y,$$

pro která $y(0) = \pi/4$ a

a) $y(\ln 3) = 0$; b) $y(\ln 3) = \pi/4$; c) $y(\ln 3) = \pi/2$.

V následujících příkladech najděte všechna maximální řešení.

**42** $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

**43** $xy' - 2y = 2x^4$.

# 7 Doporučené ulohy – 7. série

**42** Uvažujme soustavu lineárních diferenciálních rovnic

$$y_1' = \frac{3y_1}{x} - \frac{2y_2}{x} + \frac{2e^x - 3}{x},$$
$$y_2' = \frac{4y_1}{x} - \frac{3y_2}{x} + \frac{xe^x + 3e^x - 4}{x}.$$

(a) Dokažte, že

$$\{(x, x),\ ((2x)^{-1}, x^{-1})\}$$

je fundamentální systém příslušné homogenní soustavy na každém z intervalů $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$.

(b) Najděte tvar obecného řešení dané soustavy.

**43** Najděte obecné řešení soustavy rovnic

$$y_1' = 2y_1 + y_2,$$
$$y_2' = 3y_1 + 4y_2$$

**44** Najděte obecné řešení soustavy rovnic

$$y_1' = y_1 + 3y_2 + x + 3$$
$$y_2' = 2y_1 + 2y_2 + x - 2$$

**45** Najděte obecné řešení soustavy rovnic

$$y_1' = -2y_2 + 3x$$
$$y_2' = 2y_1 + 4$$

a řešení splňující $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 3$.

**46** Uvažujme rovnici

$$y'' + \frac{2x - 1}{2x + 1} \cdot y' - \frac{2}{2x + 1} \cdot y = \frac{x^2 + x}{2x + 1}.$$

Dokažte, že funkce $2x-1,\ e^{-x}$ tvoří fundamentální systém příslušné homogenní rovnice na každém z intervalů $(-\infty,-1/2),\ (-1/2,\infty)$. Najděte tvar obecného řešení dané rovnice.

Najděte (na maximálních intervalech) obecná reálná řešení následujících rovnic.

**47** $y''' - 8y = 0.$

**48** $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0.$

**49** $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}.$

**50** $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}.$

**51** $y'' + y = x \sin x.$

**52** $y'' + 4y = 3 \sin 2x.$

**53** $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}.$

**54** $5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3}{5}x} \sin \dfrac{4}{5}x.$