**1. série**

V následujících příkladech najděte všechna maximální řešení.

**1** $xy' - y\left(1 + \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right) = 0.$

**2** $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}.$

**3** $xy^2y' = x^2 + y^3.$

**4** $x + y - 2 + y'(x - y + 4) = 0.$

**5** $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$

**6** $(x - 2y - 5) + (2x - y - 4)y' = 0.$

***7** Najděte maximální řešení procházející bodem $(0, 0)$ rovnice

$$(2e^y - x)y' = 1.$$

***8** $y'y^2\sqrt{x} + 4xy' - y = 0.$

**9** $y'y(4y^2 - 6x^3) + (2 - 9xy^2)x = 0.$

**10** $1 + y^2 \sin 2x - 2yy' \cos^2 x = 0.$

**2. série**

**11** Uvažujme (Vivianiho křivku)

$$M = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,\ x^2 + y^2 - x = 0\}.$$

Nalezněte takový bod $a \in M$, aby $P = M \setminus \{a\}$ byla jednorozměrná plocha. Určete tečný vektorový a tečný afinní prostor (tj. tečnu) plochy $P$ v bodě $(x,y,z) \in P$.

**12** Nechť $M = \{(x,y,u,v) :\ e^{\frac{u}{x}} \cos \frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}},\ \ e^{\frac{u}{x}} \sin \frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}}\}.$

Dokažte, že existuje $\delta > 0$, pro které $P := M \cap U_\delta(1,1,0,\frac{\pi}{4})$ je dvourozměrná plocha. Najděte bázi tečného vektorového prostoru ke ploše $P$ v bodě $(1,1,0,\frac{\pi}{4})$.

**13** Dokažte Tvrzení PPRH:

Nechť $1 \le k < n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je neprázdná omezená otevřená množina a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je prosté spojité zobrazení. Nechť $\widetilde{\varphi}\colon \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení, které rozšiřuje zobrazení $\varphi$. Pak $\varphi\colon G \to \varphi(G)$ je homeomorfismus, právě když platí podmínka

$$\widetilde{\varphi}(\partial G) \cap \varphi(G) = \emptyset.$$

**14** Nechť $\varphi(t) = (\cos t, t\cos t), \quad t \in \mathbb{R}$.

a) Je restrikce $\varphi$ na interval $(0, 3\pi/2)$ (resp. $(0, 5\pi/4)$) reguární homeomorfismus ?

b) Jsou obory hodnot těchto zobrazení parametricky zadané 1-rozměrné plochy ?

**15** Dokažte, že množina

$$P := \{(x,y,z) :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \setminus ([0,\infty) \times \{0\} \times \mathbb{R})$$

je paramericky zadaná 2-rozměrná plocha. Napište rovnici tečného afinního prostoru k $P$ v bodě $(3^{-1/2}, 3^{-1/2}, 3^{-1/2})$.

**16** Nechť

$$\varphi(t) = \left(\frac{2t}{t^3+1}, \frac{2t^2}{t^3+1}\right), \quad t \in (0,\infty).$$

Je obor hodnot $\varphi$ parametricky (resp. implicitně, resp. explicitně) zadaná jednorozměrná plocha ?

**17** Nechť $P \subset \mathbb{R}^n$ je $k$-rozměrná plocha (resp. parametricky zadaná, resp. implicitně zadaná, resp. explicitně zadaná $k$-rozměrná plocha). Nechť $d$ je difeomorfismus definovaný ve všech bodech $P$. Je nutně $d(P)$ plocha stejného typu?

**18** Pro $P \subset (0,\infty) \times \mathbb{R}$ nechť $P^*$ je množina, která vznikne rotací kolem osy $z$ množiny

$$\{(x,y,z): \ y=0, (x,z) \in P\}.$$

a) Definujte množinu $P^*$ analyticky.

b) Dokažte, že pokud $P$ je 1-rozměrná plocha (resp. implicitně zadaná 1-rozměrná plocha), pak $P^*$ je 2-rozměrná plocha (resp. implicitně zadaná 2-rozměrná plocha).

c) Dokažte, že pokud $P$ je graf $C^1$ funkce, pak $P^*$ je explicitně zadaná 2-rozměrná plocha.

d) Dokažte, že pokud $P$ je 1-rozměrná parametricky zadaná plocha, pak množina $P^* \setminus (\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R})$ je 2-rozměrná parametricky zadaná plocha.

e) Nechť $P = \{(x,y): \ \|(x,y)-(2,0)\| = 1\}$. Určete normálový prostor anuloidu $P^*$ v bodě $(x,y,z) \in P$.

****19** Problémek 1.

Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ a $a \in M$, pak běžná definice tečného kužele $T_a^*(M)$ ("tangent cone", "contingent cone") je tato:

$T_a^*(M)$ je množina všech $v \in \mathbb{R}^n$, pro které existují posloupnosti $t_n > 0$, $x_n \in M$ (n=1,2, … ) takové, že $t_n \to 0$ a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|x_n - (a + t_n v)\|}{t_n} = 0.$$

Dokažte, že pokud $M$ je $k$-rozměrná plocha, pak $T_a^*(M) = T_a(M)$.

**3. série**

**20** Dokažte, že uzávěr souvislé množiny je vždy souvislá množina.

**21** Nechť $A$, $B$ jsou souvislé podmnožiny stejného metrického prostoru. Musí být
a) $A \cap B$ souvislá ?
b) $A \cup B$ souvislá ?

***22** Dokažte, že eukleidovské prostory $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ nejsou homeomorfní.
Návod: Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^2$. Vyšetřete, zda množiny $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{b\}$ jsou souvislé.

**23** Nechť $\varphi$ je jednoduchá uzavřená cesta v $\mathbb{R}^2$ a $G$, $H$ jsou disjunktní souvislé neprádné otevřené množiny takové, že $\mathbb{R}^2 \setminus \langle\varphi\rangle = G \cup H$. Bez použití Jordanovy věty dokažte, že:
a) Jedna z množin $G$, $H$ je omezená a druhá neomezená.
b)* $\langle\varphi\rangle = \partial G \cup \partial H$.
c)** (Problémek 2) Za předpokladu, že $\varphi$ je skoro regulární, dokažte, že $\langle\varphi\rangle = \partial G = \partial H$.

**24** Nechť $\varphi$ je cesta popisující rovnoměrný pohyb z bodu $(1,1,1)$ do bodu $(2,2,3)$ v časovém intervalu $[0,1]$. Nechť $v(x,y,z) = (x,y,z)$. Spočtěte křivkové integrály (kde v druhém integrálu jde o obvyklý zkrácený zápis)

$$\int_\varphi (x+y)\ ds, \qquad \int_\varphi (y\,dx + x\ dy), \qquad \int_\varphi v\ d\varphi.$$

**25** Spočtěte těžiště půlkružnice.

**26** Nechť $a, b > 0$ a $\varphi(t) := (a\cos t, a\sin t, bt),\ t \in [0, 2\pi]$, (jeden závit šroubovice). Spočtěte

$$\int_\varphi (yz\,dx + xz\ dy + xy\ dz).$$

**27** Nechť pro celé $n$ je $\varphi_n(t) = (\cos nt, \sin nt),\ t \in [0, 2\pi]$. Pro $z = (0,0)$ spočtěte $\operatorname{ind}_\varphi(z) = w(\varphi, z)$.

**28**
Nechť $\psi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (část cykloidy) a $\nu(t) = (t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$. Položme $\varphi := \psi \;-\; \nu$.

a) Ověřte platnost Jordanovy věty pro $\varphi$.
b) Pomocí klasické Greenovy věty spočtěte $\lambda_2(\operatorname{Int}\varphi)$.
b) Pomocí klasické Greenovy věty spočtěte těžiště $\operatorname{Int}\varphi$.

***29** Nechť $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\nu : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ jsou $C^1$ cesty, pro které
a) $\psi(0) = \nu(0)$, $\psi(1) = \nu(1)$ a $\psi_2(t) < \nu_2(t)$, $t \in (0,1)$;
b) $\psi_1'(t) > 0$ a $\nu_1'(t) > 0$ pro $t \in [0,1]$.
Položme $\varphi := \psi \;-\; \nu$.

(i) Ověřte platnost Jordanovy věty pro $\varphi$.
(ii) Dokažte, že pokud $f$ je funkce třídy $C^1$ na otevřené množině obsahující uzávěr množiny $\operatorname{Int}\varphi$, pak platí

$$\int_\varphi f \; dx = -\int_{\operatorname{Int}\varphi} \frac{\partial f}{\partial y} \; dx \, dy.$$

Návod: Cesty $\psi$, $\nu$ „reparametrizujte pomocí $x$“, použijte Tvrzení ZP a pak postupujte jako „pro čtverec“.

**30** (astroida; jedna z hypocykloid)
Nechť $\varphi(t) := (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

a) Ověřte platnost Jordanovy věty pro $\varphi$.
b) Pomocí klasické Greenovy věty spočtěte $\lambda_2(\operatorname{Int}\varphi)$.

***31** (Steinerova hypocykloida)
Nechť $\varphi(t) := (2\cos t + \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

a) Dokažte, že $\varphi$ je jednoduchá uzavřená skoro regulární cesta.
b) Pomocí klasické Greenovy věty spočtěte $\lambda_2(\operatorname{Int}\varphi)$.

**4. série**

**32** (část helikoidu)
Nechť

$$P := \{(x,y,z) = (u\cos v, u\sin v, v) : \quad 0 < u < 1, 0 < v < 2\pi\}.$$

Spočtěte $\mu_2(P)$ a $\int_P z\, dS$.

**33** Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ jsou nekolineární body a uvažujme trojúhelník

$$P = \{\alpha a + \beta b + \gamma c : \ \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\}.$$

(a) Pro případ $n = 4$, $a = (0,1,2,0)$, $b = (1,3,0,0)$, $c = (0,0,2,4)$ spočtěte $\mu_2(P)$.

(b) Spočtěte těžiště $T = T_P$.

**34** Nechť

$$P := \{(x,y,z) : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}.$$

Spočtěte $\mu_2(P)$ a těžiště $T = T_P$.

**35** Nechť

$$P := \{(x,y,z) : \quad 4z - xy = 0, \ x^2 + y^2 < 1\}.$$

Spočtěte $\mu_2(P)$.

**36** Nechť $P \subset \mathbb{R}^n$ je $k$-rozměrná parametricky zadaná plocha. Dokažte, že

$$\int_P (f+g)\, dS = \int_P f\, dS + \int_P g\, dS,$$

má-li pravá strana rovnosti smysl.

**37** Nechť $P_1$ a $P_2$ jsou $k$-rozměrné parametricky zadané plochy v $\mathbb{R}^n$, pro které $\mu_k(P_1) = \mu_k(P_2)$. Platí nutně $\mu_k(\alpha(P_1)) = \mu_k(\alpha(P_2))$, je-li $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

(a) obecné prosté afinní zobrazení;

(b) izometrické zobrazení, tj. $\alpha = a + L$, kde $a \in \mathbb{R}^n$ a $L$ je unitární zobrazení?

***38** Nechť $P_1$ a $P_2$ jsou $k$-rozměrné parametricky zadané plochy v $\mathbb{R}^n$ takové, že

(*) $\overline{P_1} \cap P_2 = \emptyset$ a $\overline{P_2} \cap P_1 = \emptyset$.

(a) Dokažte, že $P = P_1 \cup P_2$ je parametricky zadaná plocha a $\mu_k(P) = \mu_k(P_1) + \mu_k(P_2)$.

(b) Co lze říci o vztahu těžišť $T_P$, $T_{P_1}$, $T_{P_2}$?

## 5. série

**39** (Möbiův list)

Pro $(t,\alpha) \in G := (-1,1) \times \mathbb{R}$ nechť

$$\varphi(t,\alpha) = ((2 + t\cos(\alpha/2))\cos\alpha, (2 + t\cos(\alpha/2))\sin\alpha, t\sin(\alpha/2)) .$$

a) Spočtěte $w_\varphi(0,\alpha)$.
b) Dokažte, že $P := \varphi(G)$ je dvourozměrná plocha.
c) Dokažte, že $P$ není orientovatelná. (Přirozené je užít a).)

**40** (Míra rotační plochy.)

Nechť množina $P$ z Úlohy 18 je jednorozměrná parametricky zadaná plocha. Dokažte, že pak

$$\mu_2(P^*) = 2\pi \int_P x_1 \, dS.$$

**41** Spočtěte míru povrchu anuloidu (viz Úloha 18 e)).

**42** Nechť $a, h > 0$ a $P := \{(x,y,z): \ x^2 + y^2 = a^2, \ -h < z < h.\}$

(i) Ukažte, že $P$ je souvislá orientovatelná plocha a najděte obě její spojitá jednotková normálová pole $\nu^1$, $\nu^2$.

(ii) Nechť $F(x,y,z) := (x,y,z), \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pro obě orientace spočtěte tok

$$\int_P \overrightarrow{F} \, d\overrightarrow{S}.$$

**43** Nechť

$$G := \{(x,y,z): \ x^2 + y^2 + z^2 < 1\} \quad \text{a} \quad F(x,y,z) := (x,y,z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Ověřte rovnost z věty o divergenci přímým výpočtem obou stran. (Objem koule nepočítejte.)

**44** Nechť $G$ je vnitřek kužele s vrcholem $(0,0,1)$, jehož podstavou je kruh v rovině $xy$ o poloměru 1 se středem v počátku. Nechť $F(x,y,z) := (x, y, x+z), \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Ověřte rovnost z věty o divergenci přímým výpočtem obou stran.

**45** (Descartova smyčka.) Pomocí Gaussovy věty spočtěte míru množiny

$$G = \{(x, y) : \ x^3 + y^3 - 2xy < 0, \ x > 0, y > 0\}.$$

**46** (Newtonovo gravitační silové pole.) Nechť $a \in \mathbb{R}^3$ a

$$v(x) := \frac{a - x}{\|a - x\|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{a\}.$$

Nechť $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{a\}$ je po částech $C^1$ cesta, pro kterou $\varphi(0) = a + e_1$ a $\varphi(1) = a + 2e_2$. Spočtěte

$$\int_\varphi v \ d\varphi.$$

(Návod: najděte potenciál pole $v$.)

***47** Uvažujme jednotkovou sféru $P = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ jako hmotnou plochu s plošnou hustotou 1. Dokažte, že příslušná gravitační síla působící na hmotný bod umístěný v bodě $a = (0, 0, v), \ 0 < v < 1$, je nulová.

**6. série**

**48** (Gaussův integrál v $\mathbb{R}^3$.)
Nechť $G \subset \mathbb{R}^3$ a $\nu$ jsou jako v Gaussově větě, $a \in \mathbb{R}^3$ a

$$v(x) := \frac{x-a}{\|x-a\|^3}.$$

Nechť

$$I(a,G) := \int_{\partial_* G} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{S} = \int_{\partial G} \langle v, \nu \rangle \, dS.$$

Dokažte, že
(i) pokud $a \notin \overline{G}$, pak $I(a,G) = 0$;
(ii)* pokud $a \in G$, pak $I(a,G) = 4\pi$.

**49** Nechť $P := \{(x,y,z) : 3x + 2z = 6,\ x^2 + y^2 < 4\}$ a $F(x,y,z) := (z,x,y)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Plochu $P$ orientujte a při této orientaci spočtěte $\int_P \overrightarrow{\operatorname{rot} F}\, d\overrightarrow{S}$
(i) z definice;
(ii) pomocí Stokesovy věty.

**50** Nechť $G := (1,2) \times (0, 2\pi)$ a

$$\psi(u,v) := (u \cos v, u \sin v, v), \quad (u,v) \in G.$$

Nechť plocha $P := \psi(G)$ (část šroubové plochy) je orientovaná pomocí $\psi$ a

$$F(x,y,z) := (z^2 - x^2, x^2 - y^2, y^2 - z^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Vyjádřete $T := \int_P \overrightarrow{\operatorname{rot} F}\, d\overrightarrow{S}$ jako Lebesgueův integrál přes $G$.
(ii) Pomocí Stokesovy věty vyjádřete $T$ jako součet jednorozměrných Lebesgueových integrálů (stačí napsat čtyři z nich).
(iii) Jednou z metod $T$ spočtěte.

**51** Nechť plocha $P$ je „otevřený trojúhelník“ s vrcholy $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ a $F(x,y,z) := (y^2, z^2, x^2)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Plochu $P$ orientujte a při této orientaci spočtěte $\int_P \overrightarrow{\operatorname{rot} F}\, d\overrightarrow{S}$
(i) z definice;
(ii) pomocí Stokesovy věty.

**52** Nechť $P := \{(x,y,z) : x + z = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ je orientovaná “nahoru„; tj. polem $\nu$, pro které $\nu_3 > 0$. Nechť $F(x,y,z) := (y,z,x)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Spočtěte $\int_P \overrightarrow{\operatorname{rot} F}\, d\overrightarrow{S}$

(i) z definice;
(ii) pomocí Stokesovy věty.

**53** Nechť $F$ je vektorové pole třídy $C^2$ na otevřené podmnožině $G \subset \mathbb{R}^3$. Dokažte, že na $G$
$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0.$$

**54** Nechť

$$P_1 := \{(x,y,z) : \; z = 1, \; x^2+y^2+z^2 < 4\} \; \text{ a } \; P_2 := \{(x,y,z) : \; z > 1, \; x^2+y^2+z^2 = 4\}.$$

jsou orientované plochy a $F = (F_1, F_2, F_3) \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Položme

$$T_1 := \int_{P_1} \overrightarrow{\operatorname{rot} F} \, d\overrightarrow{S}, \quad T_2 := \int_{P_2} \overrightarrow{\operatorname{rot} F} \, d\overrightarrow{S}.$$

Dokažte, že $|T_1| = |T_2|$
(i) pomocí Stokesovy věty;
(ii) v případě, že $F \in C^2(\mathbb{R}^3)$, pomocí Gaussovy věty a předchozí úlohy.

**55** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ a $\nu$ jsou jako v Gaussově větě. Dokažte, že

$$\int_{\partial G} \nu(x) \; dS(x) = 0,$$

kde plošný integrál 1. druhu z vektorové funkce se přirozeně definuje po složkách. (Zkuste výsledek fyzikálně interpretovat.)

**56** Nechť $G \subset \mathbb{R}^2 \times (-\infty, 0)$ a $\nu$ jsou jako v Gaussově větě.
(i) Pomocí Gaussovy věty vyjádřete

$$\int_{\partial G} c \, x_3 \, \nu(x_1, x_2, x_3) \; dS(x), \quad \text{kde} \quad c > 0.$$

(ii) V případě, že $G$ je konvexní (nebo obecněji $\mathbb{R}^3 \setminus G$ je souvislá) a $c = \rho g$, kde $\rho$ je hustota kapaliny a $g$ tíhové zrychlení, interpretujte (i) jako odvození Archimédova zákana z Pascalova zákona. (Z Gaussovy věty lze určit také celkový otáčivý účinek všech elementárních tlakových sil: ten je stejný, jako kdyby výsledná síla púsobila v „geometrickém těžišti tělesa“; tj. těžišti příslušného homogenního tělesa.)

**7. série**

**57** Nechť $(X, \rho)$, $(X, \sigma)$ jsou separabilní (resp. úplné, resp. totálně omezené, resp. kompaktní) metrické prostory. Dokažte, že jejich součin má stejnou vlastnost.

**58** O metrickém prostoru $l^2$ dokažte, že je separabilní, ale není totálně omezený.

**59** Dokažte, že prostor $l^\infty$ není separabilní.

**60** Dokažte, že prostor spojitých omezených funkcí na $(0,1)$ se supremovou metrikou není separabilní.

***61** Dokažte, že $K := \{(x_1, x_2, \dots) \in l_2 : |x_n| \leq \frac{1}{n}\}$ je kompaktní podmnožina prostoru $l_2$.

**62** Dokažte, že podmnožina úplného metrického prostoru je reziduální, právě když obsahuje hustou $G_\delta$ množinu.

**63** Pomocí Baireovy věty dokažte, že množina racionálních čísel není typu $G_\delta$ v $\mathbb{R}$.

**64** Dokažte, že hranice uzavřené (otevřené) množiny je vždy řídká množina.

**65** Dokažte, že konečné sjednocení řídkých množin je opět řídká množina.

****66** (Problémek 3) Baireovou metodou kategorií dokažte, že existuje spojitá funkce na $(0,1)$, která není monotónní na žádném intervalu. (Návod: Dokažte, že množina funkcí $f \in C[0,1]$, pro které existuje interval, na kterém je $f$ monotónní, je 1. kategorie v $C[0,1]$.)

## 8. série

**67**

a) Dokažte, že $\cos^{2n} x$ , $n = 0, 1, 2, ...$ je trigonometrický polynom. (Návod : Vyjádřete $\cos x$ pomocí Eulerových vzorců.)

b) Z předchozího vypočtěte $\int_a^{a+2\pi} \cos^{2n} x \cos kx\, dx$, $k = 0, 1, ...$ pomocí kombinačních čísel.

$c)*$ Dokažte, že reálná funkce $f(x)$ na $\mathbb{R}$ je trigonometrický polynom , právě když existuje polynom dvou proměnných $P(u, v)$ takový, že platí
$f(x) = P(\cos x, \sin x)$.

**68** Sečtěte trigonometrickou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx$ pro $q \in (-1, 1)$. Je tato řada Fourierovou řadou svého součtu?

**69**

a) Sečtěte trigonometrickou řadu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$.

b) Pomocí a) vypočtěte $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx dx$ pro $n = 0, 1, ....$

**70** Najděte trigonometrickou řadu, jejíž součet je:

a) $x^2$ pro $x \in (-\pi, \pi)$. Použijte pro $x = 0$.
b) $x$ pro $x \in (-\pi, \pi)$. Použijte pro $x = \frac{\pi}{2}$.
c) $\sin ax$, $(a \in \mathbb{R})$ pro $x \in (-\pi, \pi)$. Použijte pro $x = \frac{\pi}{2}$.
d) $x^2$ pro $x \in (0, 2\pi)$. Použijte pro $x = 0$.

**71**

a) Funkci $f(x) = x$ napište na $(0, \pi)$ jako součet kosinové řady.
b) Funkci $f(x) = x^2$ napište na $(0, \pi)$ jako součet sinové řady.

***72** Nechť $f$ je lipschitzovská funkce na intervalu $(\pi/2, \pi)$. Dokažte, že lze najít čísla $c_n$, aby

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2n-1)x \;=\; f(x) \qquad \text{pro} \;\; x \in (\pi/2, \pi).$$

**73**

(a) Nechť $0 < \alpha < 1$ a $f$ je spojitým rozšířením funkce $|x|^\alpha \cos(1/x)$ na interval $[-1, 1]$. Dokažte, že $f$ nemá konečnou variaci na $[-1, 1]$.

(b) Nechť $g \in \mathcal{P}(2\pi)$ a $f = g$ na nějakém okolí bodu 0. Dokažte, že Fourierova řada funkce $g$ má v bodě 0 součet 0.

***74** Dokažte, že při $\alpha > 1$ má funkce $f$ z předchozí úlohy konečnou variaci na intervalu $[0, 1]$.

**75** Nechť funkce $f, g$ mají konečnou variaci na intervalu $[a, b]$. Dokažte, že funkce $f+g, fg, \max(f, g)$ a (pokud $\inf_{x\in[a,b]} g(x) > 0$) $f/g$ mají konečnou variaci na $[a, b]$.

***76** Dokažte „Eulerův rozklad funkce $\sin \pi x$ na kořenové činitele“

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2}),$$

(který platí pro každé $x$) pro $x \in (-1, 1)$. Dosazením $x = 1/2$ dokažte Wallisovu formuli. Návod:

(a) Rozviňte funkci $f(x) = \cos \alpha x$, $0 < \alpha < 1$ na $[-\pi, \pi]$ do Fourierovy řady.

(b) Výsledný vzorec aplikujte pro $x = \pi$. Dostanete „rozklad funkce $\operatorname{cotg} \pi\alpha$ na parciální zlomky“

$$\operatorname{cotg} \pi\alpha - \frac{1}{\pi\alpha} = \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}.$$

(c) Tuto identitu integrujte od 0 do $0 < x < 1$.