Požadavky z Matematické analýzy 4 (NMMA202)
Konečná verze

Speciální diferenciální rovnice 1. řádu: Bernoulliova, homogenní, exaktní, $y' = f((a_1x + b_1y + c_1)/(a_2x + b_2y + c_2))$.

Pojem k-rozměrné plochy v $\mathbb{R}^n$; plochy zadané explicitně, implicitně a parametricky. Pojem regulárního homeomorfizmu, Tvrzení PPRH (bez důkazu). Tečný a normálový prostor - dimenze a metody výpočtu.

Věta o Lagrangeových multiplikátorech - důkaz pomocí teorie ploch.

Druhy cest v $\mathbb{R}^n$ (C^1, po částech C^1, skoro regulární, po částech lineární, uzavřená, jednoduchá uzavřená). Definice křivkového integrálu 1. a 2. druhu (práce nebo integrál z diferenciální formy) přes po částech C^1 cesty. Existence těchto integrálů pro spojité integrandy. Změna parametrizace a křivkové integrály. Integrál přes „opačnou cestu“ a přes „součet cest“.

Jordanova věta a „klasická Greenova věta“ (obojí bez důkazu). Výpočet $\int_\varphi f\ dx_1$ a $\int_\varphi f\ dx_2$ pomocí Greenovy věty. Důkaz Greenovy věty pro „čtverec“. Definice $ind_\varphi(z_0) = w(\varphi, z_0)$. Výpočet práce potenciálního vektorového pole. Množina potenciálů na souvislé otevřené množině. Konzervativní a potenciální vektorové pole a jejich vztah. Charakterizace potenciálnosti C^1 vektorového pole na hvězdicovité množině G mocí parciálních derivací složek. (Protipříklad pro $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.) Gramova matice a gramián. Zavedení a vlastnosti k-rozměrné míry na k-rozměrném afinním prostoru $A \subset \mathbb{R}^n$ (Tvrzení I, II, III - znalost znění bez důkazu.) Motivace definice plošného integrálu 1. druhu. Definice „k-rozměrného jakobiánu“ $|J|_\varphi(t)$. k-rozměrný jakobián složeného zobrazení. Definice plošného integrálu 1. druhu přes parametricky zadanou plochu a důkaz korektnosti této definice. Definice těžiště míry a těžiště homogenní k-rozměrné plochy.

Vektorový součin $u^1 \times \cdots \times u^{n-1}$, věta o jeho charakterizaci, souvislost se skalárním součinem (Věty 10 a 11). Vektor $w_\varphi(t)$, výpočet jeho složek, souvislost s $|J|_\varphi(t)$. „Případ explicitně zadané plochy“.

Pojem k-nulové množiny, základní vlastnosti tohoto pojmu (Tvrzení „kn“). Přípustná k-rozměrná množina $M \subset \mathbb{R}^n$ a definice plošného integrálu 1. druhu přes M. Korektnost této definice (V 13). Přípustnost k-rozměrné plochy (V 12). „Odložené důkazy“ Tvrzení „kn“, V 12, V 13, Tvrzení „P_1P_s“ a příslušných lemmat α, β, γ nebudou na písemce, ale na ústní zkoušce se bude zkoušet znění; důkazy jen na známky 1-2.

Orientace $(n-1)$-rozměrné plochy v $\mathbb{R}^n$, orientovatelnost parametricky a implicitně zadané plochy. Počet orientací souvislé plochy. Pojem kladné a záporné parametrizace. Tok vektorového pole orientovanou plochou P a jeho výpočet pomocí kladné parametrizace v případě, že P je parametricky zadaná.

Regulární hraniční bod a regulární hranice $\partial_* G$ otevřené množiny G. Vektor mířící ven z G a do G, orientace $\partial_* G$ „vnější normálou“. Divergence vektorového pole. Věta o divergenci (=Gaussova věta). Skalární verze Gaussovy věty. Vztah objemu koule a plošného obsahu sféry. Důkaz části skalární verze Gaussovy věty pro i-speciální množiny (Tvrzení GS). Náznak důkazu Gaussovy věty pro konkrétní množiny pomocí rozkladu na i-speciální množiny.

Definice $\int_P f(x)\ dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n$ pro $(n-1)$-rozměrnou orientovanou plochu P.

Pojem k-rozměrné *parametrické plochy* φ v $\mathbb{R}^n$ a definice integrálů $\int_\varphi f dS$, $\int_\varphi \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S}$, $\int_\varphi f\ dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_k}$.

Vztah integrálů přes *parametricky zadanou plochu* a přes příslušnou *parametrickou plochu* (Tvrzení RI).

Verze Greenovy věty formulovaná bez užití Jordanovy věty a její důkaz pomocí Gaussovy věty.

Rotace vektorového pole a klasická Stokesova věta.

Tři ekvivalentní definice kompaktních prostorů (pomocí množiny hromadných bodů, „Cantorova principu" a spočetného otevřeného pokrytí). Separabilní prostory, existence spočetné báze otevřených množin, separabilita podprostoru. Separabilní prostor je Lindelöfův. Vztah kompaktnosti, totální omezenosti, omezenosti a separability. Charakterizace kompaktních prostorů pomocí "Borelovy věty" (libovolné otevřené pokrytí) a pomocí úplnosti a totální omezenosti. Totální omezenost a relativní kompaktnost v úplných prostorech. Množiny řídké, 1. a 2. kategorie a množiny reziduální. Baireova věta v úplných prostorech. Idea existenčních důkazů metodou kategorií. Banachův princip kontrakce (=věta o pevném bodě), aplikace na důkaz Picardovy věty a na důkaz věty o inverzním zobrazení. Souvislé (a obloukově souvislé) prostory a množiny, souvislost podmnožin přímky. Spojitý obraz souvislého prostoru. Oblouková (=křivková) souvislost otevřených souvislých podmnožin $\mathbb{R}^n$. Definice komponent, jejich vlastnosti (bez důkazu). Pojem součinu konečně mnoha metrických prostorů.

Pojem trigonometrické řady a trigonometrického polynomu. Ortogonalita komplexního a reálného trigonometrického systému. Koeficienty stejnoměrně konvergentní trigonometrické řady. Fourierova řada, komplexní zápis. Dirichletovo a Fejérovo jádro; vyjádření s_n a σ_n pomocí těchto jader. Riemann-Lebesgueovo lemma. Věta o lokalizaci. Diniho kritérium a jeho důsledky. Jordan-Dirichletovo kritérium (bez důkazu). Fejérova věta. Weierstrassovy věty o aproximaci.

Jordanův rozklad funkce s konečnou variací. Definice absolutně spojité funkce. Vztah funkcí s konečnou variací, absolutně spojitých a lipschitzovských.

Vztah derivace a Lebesgueova integrálu: Lebesgueova věta o derivaci monotónní funkce (bez důkazu). Vlastnosti derivace neklesající funkce - vztah integrálu derivace a přírustku původní funkce. Cantorova singulární funkce. Lebesgueova věta o derivaci neurčitého Lebesgueova integrálu. Vztah neurčitých Lebesgueových integrálů, absolutně spojitých funkcí a platnosti zobecněné Newton-Leibnizovy formule.

V početní části písemky budou 3-4 příklady řešitelné metodami z Doporučených úloh (1-2 příklady na křivkový a plošný integrál, 0-1 příklad na diferenciální rovnice, 0-1 příklad na Fourierovy řady). Někdy bude v zadání požadavek zformulovat příslušnou větu (např. Gaussovu, Greenovu, Stokesovu nebo větu o Fourierových řadách).

V teoretické části budou 2 úlohy na definice, 2 na znění vět, 1 kratší důkaz (nebo část delšího důkazu) a 1 delší (resp. obtížnější) důkaz (volba mezi D1 a D2).