Analytická geometrie III

Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

2020

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/

Hermann Grassmann, 1809-1877

Vektorový prostor

Definice (Vektorový prostor)

Je dáno těleso $\mathbb{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Vektorovým prostorem **V** nad tělesem $\mathbb{T}$ rozumíme množinu V spolu s binární operací $+$ $(\mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V})$ a operací $\cdot$ násobení prvků z V prvkem z $\mathbb{T}$ $(\mathbb{V} \times \mathbb{T} \to \mathbb{V})$, pro které platí následující axiomy:

1.1 Pro libovolné $\vec{u}, \vec{v} \in V$ platí $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

1.2 Pro libovolné $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ platí $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.

1.3 $\exists\, \vec{o} \in V; \vec{o} + \vec{u} = \vec{u}$.

1.4 Pro každé $\vec{u} \in V, \exists - \vec{u} \in V; \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$.

2.1 Pro libovolné $\vec{u} \in V$ a $a, b \in \mathbb{T}$ platí $a \cdot (b \cdot \vec{u}) = (a \cdot b) \cdot \vec{u}$.

2.2 Pro libovolné $\vec{u} \in V$ platí $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

2.3 Pro libovolné $\vec{u} \in V$ a $a, b, \in \mathbb{T}$ platí $(a + b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$.

2.4 Pro libovolné $\vec{u}, \vec{v} \in V$ a $a \in \mathbb{T}$ platí $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$.

$\mathbb{R}^n$ nazýváme aritmetický vektorový prostor

Definice (Vektorový podprostor)

Neprázdnou množinu $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ nazveme *vektorovým podprostorem* prostoru $\mathbf{V}$, jestliže

- $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbf{W}; \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in \mathbf{W}$,
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{u} \in \mathbf{W}; a \cdot \overrightarrow{u} \in \mathbf{W}$.

Definice (Vektorový podprostor)

Neprázdnou množinu $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ nazveme *vektorovým podprostorem* prostoru $\mathbf{V}$, jestliže

- $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbf{W}; \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in \mathbf{W}$,
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{u} \in \mathbf{W}; a \cdot \overrightarrow{u} \in \mathbf{W}$.

Věta (Vlastnosti vektorových podprostorů)

- $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k} \in \mathbf{W} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{u_i} \in \mathbf{W}$
- $\overrightarrow{o} \in \mathbf{W}$
- *Každý podprostor vektorového prostoru je vektorový prostor.*

Vektorový prostor

Definice (LNZ a LZ)

Konečná množina vektorů $\mathbf{S} = \overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$ vektorového prostoru **V** se nazývá *lineárně nezávislá*, jestliže rovnice

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{v_i} = 0$$

má jediné řešení $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$. V opačném případě se nazývá *lineárně závislá*.

Vektorový prostor

Definice (LNZ a LZ)

Konečná množina vektorů $\mathbf{S} = \vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}$ vektorového prostoru $\mathbf{V}$ se nazývá *lineárně nezávislá*, jestliže rovnice

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v_i} = 0$$

má jediné řešení $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$. V opačném případě se nazývá *lineárně závislá*.

Definice (Lineární kombinace)

Vektor $\vec{v}$ vektorového prostoru $\mathbf{V}$ se nazývá *lineární kombinací* vektorů $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k} \in \mathbf{V}$, jestliže existují skaláry $a_1, a_2, \dots, a_k$ takové, že $\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v_i}$.

Definice (Báze)

Báze je množina lineárně nezávislých vektorů, které generují celý vektorový prostor.

Definice (Báze)

Báze je množina lineárně nezávislých vektorů, které generují celý vektorový prostor.

Definice (Dimenze (rozměr) vektorového prostoru)

Dimenzí $\dim \mathbf{V}$ vektorového prostoru $\mathbf{V}$ budeme rozumět mohutnost jeho libovolné báze.
Zn. $\mathbf{V}^n$ je vektorový prostor dimenze n, resp. n-rozměrný vektorový prostor.

Definice (Afinní prostor)

Mějme danou neprázdnou množinu $\mathbf{A}$, vektorový prostor $\mathbf{V}^n(\mathbb{T})$ a zobrazení $f : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{V}^n$. Trojicí $(\mathbf{A}, \mathbf{V}^n, f)$ nazýváme *n-rozměrný afinní prostor*, jestliže platí:

1. Pro každé $X, Y, Z \in \mathbf{A}$ je $f(X, Y) + f(Y, Z) = f(X, Z)$.

   linearita

2. Existuje $P \in \mathbf{A}$ tak, že zobrazení f_P množiny $\mathbf{A}$ do prostoru $\mathbf{V}^n$, přiřazující každému $X \in \mathbf{A}$ vektor $f(P, X)$, je vzájemně jednoznačné.

   bod $\leftrightarrow$ vektor

$\mathbf{A}$ je *nosič afinního prostoru*,

$\mathbf{V}^n$ je *zaměření afinního prostoru*,

prvky množiny $\mathbf{A}$ nazýváme *body afinního prostoru*,

$\mathbb{A}^1$ je afinní přímka, $\mathbb{A}^2$ je afinní rovina,

vektor $f(X, Y)$ zapisujeme ve tvaru $(Y - X)$

Definice (Repér)

Buď $P \in \mathbb{A}^n$ a $\beta = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ buď báze $\mathbf{V}^n$. Potom uspořádanou $(n+1)$-tici $\mathcal{R} = (P; \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ nazýváme *repér* v prostoru $\mathbb{A}^n$.

Afinní prostor

Definice (Repér)

Buď $P \in \mathbb{A}^n$ a $\beta = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ buď báze $\mathbf{V}^n$. Potom uspořádanou $(n+1)$-tici $\mathcal{R} = (P; \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ nazýváme *repér* v prostoru $\mathbb{A}^n$.

Definice (LSS)

Mějme v prostoru $\mathbb{A}^n$ dán repér $\mathcal{R} = (P; \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$. Zobrazení $\mathcal{L}$, které každému bodu $X \in \mathbb{A}^n$ přiřadí n-tici $[x_1, \ldots, x_n]$ definovanou vztahem $X = P + x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$, nazýváme *lineární soustava souřadnic* určená repérem $\mathcal{R}$.

- bod P nazýváme *počátek* LSS $\mathcal{L}$,
- $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ nazýváme souřadnicové vektory,
- $[x_1, \ldots, x_n]$ souřadnice bodu X vzhledem k LSS $\mathcal{L}$ určené repérem $\mathcal{R}$
- zn. $X = [x_1, \ldots, x_n]$

Afinní podprostory

Parametrické vyjádření podprostoru $\mathbb{R}^n$, procházejícího bodem P:

$$X = P + t_1\overrightarrow{u_1} + t_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + t_n\overrightarrow{u_n}$$

t.j.:

$$x_1 = p_1 + t_1 u_{1_1} + t_2 u_{2_1} + \cdots + t_n u_{n_1}$$

$$\vdots$$

$$x_n = p_n + t_1 u_{1_n} + t_2 u_{2_n} + \cdots + t_n u_{n_n}$$

$$\text{pro } t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$$

Obecná rovnice nadroviny $\mathbb{R}^n$:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1} = 0,$$

$$\text{pro } (a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$$

Věta (Průnik podprostorů)

Afinní podprostory $\mathbb{A}^k\{U, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \dots\}$, $\mathbb{A}^l\{V, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \dots\}$ *prostoru* $\mathbb{A}^n$, $n \geq k, l$, *mají neprázdný průnik, právě když vektor* $(U - V)$ *je lineární kombinací vektorů* $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \dots$.

Vzájemná poloha afinních podprostorů

Definice

Dva podprostory $\mathbb{A}^k, \mathbb{A}^n$ prostoru $\mathbb{E}^n$ nazýváme

- *incidentní*, jestliže jeden z nich je podprostorem druhého,
- *rovnoběžné*, jestliže vektorové zaměření jednoho z nich je podprostorem druhého,
- *různoběžné*, jestliže $\mathbb{A}^k, \mathbb{A}^l$ nejsou rovnoběžné a jejich průnik je neprázdný,
- *částečně rovnoběžné*, jestliže nejsou rovnoběžné ani různoběžné, ale jejich zaměření mají neprázdný průnik,
- *mimoběžné*, jinak.

Dělicí poměr

Definice (Dělicí poměr)

Nechť A, B, C jsou tři různé kolineární body. *Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B*, je reálné číslo λ takové, že

$$\lambda(B - C) = (A - C).$$

Zn. $(AB; C)$ (taky (ABC))

Eukleidovský prostor

Definice (Skalární součin)

Skalární součin na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ je zobrazení $(\cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, které splňuje pro všechna $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbf{V}$; $c \in \mathbb{R}$:

- pro $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{o} : \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} > 0$,
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$,
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$,
- $(c\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = c(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$.

$\overrightarrow{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_n)$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Definice (Kolmost)

Je-li $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ pro $\overrightarrow{u} \neq 0$, $\overrightarrow{v} \neq 0$, pak jsou vektory $\overrightarrow{u}$ a $\overrightarrow{v}$ na sebe *kolmé* $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

Definice (Velikost vektoru)

Velikost vektoru v je

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}$$

Pozn. velikost vektoru je *norma* (indukována skalárním součinem).

Eukleidovský prostor $\mathbb{E}^n$

Definice (Odchylka dvou vektorů)

Odchylka φ dvou vektorů $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ je

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\|}$$

Definice (Vzdálenost)

Vzdálenost dvou bodů A, B je rovna velikosti vektoru $(A - B)$.

$$d(A, B) = \|A - B\|$$

Vzdálenost bodu $P = [p_1, \dots p_n]$ od nadroviny $\rho = (Q, \overrightarrow{s_1}, \dots, \overrightarrow{s_n}) = a_1 x_1 + \dots a_n x_n + a_{n+1}$ je:

$$= d(A, \rho) = \frac{|\overrightarrow{n_\rho} \cdot (Q - P)|}{\|\overrightarrow{n_\rho}\|} = \frac{|a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + a_{n+1}|}{\|\overrightarrow{n_\rho}\|}$$

Vzdálenost bodu $P = [p_1, \dots p_n]$ od přímky $q = (Q, \overrightarrow{s})$ v $\mathbb{R}^3$ je:

$$d(P, q) = \sqrt{d(P, Q)^2 - \left(\frac{\overrightarrow{s} \cdot (Q - P)}{\|\overrightarrow{s}\|}\right)^2}$$

Shodná zobrazení

Definice (Shodná zobrazení - izometrie)

Zobrazení $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ se nazývá *shodné zobrazení* právě když pro libovolné dva různé body $A, B \in \mathbb{E}$ a jejich obrazy A', B' platí

$$|A'B'| = |AB|.$$

Definice

Vzájemně jednoznačné shodné zobrazení se nazývá *shodnost*.

přímá shodnost zachovává orientaci prostoru $\circlearrowright \to \circlearrowright$

nepřímá shodnost nezachovává orientaci prostoru $\circlearrowright \to \circlearrowleft$

Shodná zobrazení

Definice (Symetrie podle podprostoru)

Nechť je v $\mathbb{E}^n$ zvolen vlastní podprostor $\mathbb{E}^k$. *Symetrií prostoru $\mathbb{E}^n$ podle podprostoru $\mathbb{E}^k$* budeme rozumět zobrazení $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, které každému bodu $X \in \mathbb{E}^n$ přiřadí bod $f(X) \in \mathbb{E}^n$ takový, že střed úsečky $\overline{XX'}$ je kolmým průmětem bodu X do podprostoru $\mathbb{E}^k$.

Věta

Symetrie podle podprostoru je involuce a shodnost.

Věta

Každá involutorní shodnost prostoru $\mathbb{E}^n$ je symetrií podle nějakého podprostoru $\mathbb{E}^n$, nebo identita.

Definice (Základní shodnost)

Nechť $\mathbb{E}^n$ je eukleidovský prostor.
Základní shodností prostoru $\mathbb{E}^n$ je symetrie tohoto prostoru podle své nadroviny $\mathbb{E}^{n-1}$.

Věta

Nechť $\mathbb{E}^n$ je eukleidovský prostor. Každou shodnost f prostoru $\mathbb{E}^n$ lze rozložit na k základních shodností $f_0, f_1, \dots, f_{k-1}$, $k \leq n+1$ tak, že

$$f = f_{k-1} \circ \cdots \circ f_1 \circ f_0.$$

Analytické vyjádření základní shodnosti podle nadroviny

$$\rho : c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + c_0 = 0$$
$$X = [x_1, \dots x_n] \to X' = [x'_1, \dots x'_n]$$
$$\vdots$$
$$x'_j = x_j - 2\frac{c_j(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + c_0)}{c_1^2 + \cdots + c_n^2}.$$

Podobná zobrazení

Definice (Podobná zobrazení)

Zobrazení $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ se nazývá *podobné zobrazení*, právě když existuje kladné číslo $k \in \mathbb{R}$ tak, že pro libovolné dva různé body $A, B \in \mathbb{E}$ platí

$$|f(X)f(Y)| = k \cdot |XY|.$$

Číslo k nazýváme *koeficient podobnosti*.

Definice

Vzájemně jednoznačné podobné zobrazení se nazývá *podobnost*.

$k = 1$ nevlastní podobnost (shodnost)

$k \neq 1$ vlastní podobnost

přímá podobnost zachovává orientaci prostoru $\circlearrowright \to \circlearrowright$

nepřímá podobnost nezachovává orientaci prostoru $\circlearrowright \to \circlearrowleft$

Věta

Nechť $\mathbb{E}^n$ je eukleidovský prostor. Každá vlastní podobnost prostoru $\mathbb{E}^n$ má právě jeden samodružný bod.

Definice (Afinní prostor)

Mějme dánou neprázdnou množinu $\mathbf{A}$, vektorový prostor $\mathbf{V}_n(\mathbb{T})$ a zobrazení $f : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{V}_n$. Trojicí $(\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, f)$ nazýváme *n-rozměrný afinní prostor*, jestliže platí:

1. Pro každé $X, Y, Z \in \mathbf{A}$ je $f(X, Y) + f(Y, Z) = f(X, Z)$.

   linearita

2. Existuje $P \in \mathbf{A}$ tak, že zobrazení f_P množiny $\mathbf{A}$ do prostoru $\mathbf{V}_n$, přiřazující každému $X \in \mathbf{A}$ vektor $f(P, X)$, je vzájemně jednoznačné.

   bod $\leftrightarrow$ vektor

A je *nositel afinního prostoru*,

$\mathbf{V_n}$ je *zaměření afinního prostoru*,

prvky množiny **A** nazýváme *body afinního prostoru*,

$\mathbb{A}^1$ je afinní přímka, $\mathbb{A}^2$ je afinní rovina,

vektor $f(X, Y)$ zapisujeme ve tvaru $(Y - X)$,

Afinní zobrazení

Definice (Afinní zobrazení)

Nechť $\mathbb{A}^n$ a $\mathbb{A}'^m$ jsou dva afinní prostory. Zobrazení $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}'^m$ nazýváme *afinní zobrazení* prostoru $\mathbb{A}^n$ do prostoru $\mathbb{A}'^m$ právě tehdy, když pro všechny trojice různých kolineárních bodů $X, Y, Z \in \mathbb{A}^n$ platí:

- $X' = f(X), Y' = f(Y), Z' = f(Z)$ buďto splynou nebo jsou tři různé kolineární body.
- Je-li $X' \neq Y' \neq Z'$, tak $(XY; Z) = (X'Y'; Z')$

Definice (Afinita)

Afinita je vzájemně jednoznačné afinní zobrazení.

Pozn. afinita zachovává rovnoběžnost a dělící poměr.

Afinní zobrazení

Analytické vyjádření afinity v $\mathbb{A}^2$

$f : X \rightarrow X'$
$x' = ax + by + p_x$
$y' = cx + dy + p_y$

$\overrightarrow{p} = (p_x, p_y)$ je vektor posunutí

Matice afinity **A**:

$X' = \mathbf{A}X + \overrightarrow{p}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A je regulární, t.j. $(\det \mathbf{A} \neq 0)$

Samodružné body:
$X = X'$

$$\begin{matrix} x = ax + by + p_x \\ y = cx + dy + p_y \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 0 = (a-1)x + by + p_x \\ 0 = cx + (d-1)y + p_y \end{matrix}$$

Samodružné směry:
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u'}$

$$\begin{matrix} \kappa u_1 = au_1 + bu_2 \\ \kappa u_2 = cu_1 + du_2 \end{matrix} \rightarrow \text{vlastní čísla } \mathbf{A}\text{, t.j.:} \begin{pmatrix} a-\kappa & b \\ c & d-\kappa \end{pmatrix}$$

Afinní zobrazení

Definice (Základní afinita)

Nechť $\mathbb{A}^n$ je afinní prostor.
Základní afinitou prostoru $\mathbb{A}^n$ je afinita, jejíž množina samodružných bodů je nadrovina prostoru $\mathbb{A}^n$.

Věta

Nechť $\mathbb{A}^n$ je afinní prostor. Každou afinitu f prostoru $\mathbb{A}^n$ lze rozložit na k základních afinit $f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}$, $k \leq n+1$ tak, že

$$f = f_{k-1} \circ \cdots \circ f_1 \circ f_0.$$

Věta

Nechť $\mathbb{A}^n$ je afinní prostor. Nechť ρ je nadrovina prostoru $\mathbb{A}^n$, která má rovnici

$$\rho : c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + c_0 = 0.$$

Je-li f základní afinita, jejíž množina všech samodružných bodů je ρ, potom existují $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tak, že analytické vyjádření základní afinity f má tvar:

$$f : x'_j = x_j + \lambda_j(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + c_0), \text{ kde } j = 1, \ldots, n.$$

Klasifikace zobrazení

$X' = \mathbf{A}X + \overrightarrow{p}$, kde $\mathbf{I}$ je matice identity

afinita	$\det \mathbf{A} \neq 0$
podobnost	$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = k^2\mathbf{I}$
stejnolehlost	$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{I}, \lambda \neq 0$
shodnost	$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$
středová souměrnost	$\mathbf{A} = -\mathbf{I}$
posunutí	$\mathbf{A} = \mathbf{I}$
identita	$\mathbf{A} = \mathbf{I}, \overrightarrow{p} = \overrightarrow{o}$

$\det \mathbf{A} > 0$ přímá

$\det \mathbf{A} < 0$ nepřímá

Lineární kombinace bodů

Definice (Lineární kombinace bodů)

Nechť $\mathbb{A}^n$ je afinní prostor, $B_1 \dots, B_k \in \mathbb{A}^n, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$. Zvolme libovolně bod $P \in \mathbb{A}^n$. Lineární kombinací bodů $B_1, \dots, B_k$ s koeficienty $\beta_1, \dots \beta_k$ budeme značit $\sum_{j=1}^{k} \beta_j B_j$ a budeme jí rozumět:

1. vektor $\sum_{j=1}^{k} \beta_j (B_j - P)$ pokud $\sum_{j=1}^{k} \beta_j = 0$.
2. bod $P + \sum_{j=1}^{k} \beta_j (B_j - P)$ pokud $\sum_{j=1}^{k} \beta_j = 1$.

V jiných případech lineární kombinací bodů nedefinujeme.

Pozn. definice je nezávislá na výběru bodu P. (důkaz jednoduchým sporem)

Lineární kombinace bodů

Definice (Lineární (ne)závislost bodů)

Nechť $\mathbb{A}^n$ je afinní prostor, $B_1 \dots, B_k \in \mathbb{A}^n, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$.
Skupina bodů $B_1 \dots, B_k$ se nazývá *lineárně nezávislá*, jestliže platí:

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \beta_j B_j = \vec{o} \wedge \sum_{j=1}^{k} \beta_j = 0\right) \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0.$$

Není-li skupina bodů lineárně nezávislá, pak je *lineárně závislá*.