Geometrie

Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

2021

http://www2.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/

Projektivní rozšíření eukleidovského prostoru $\mathbb{RP}^3$

Ke každé přímce $p \in \mathbb{R}^3$ přidáme jeden bod P_∞, který je společný pro všechny rovnoběžky s p (směr). Bod P_∞ nazýváme *nevlastním bodem* přímky p.

Projektivní rozšíření eukleidovského prostoru $\mathbb{RP}^3$

Ke každé přímce $p \in \mathbb{R}^3$ přidáme jeden bod P_∞, který je společný pro všechny rovnoběžky s p (směr). Bod P_∞ nazýváme *nevlastním bodem* přímky p.

Ke každé rovině $\rho \in \mathbb{R}^3$ přidáme jednu přímku p_∞, která je společná pro všechny roviny rovnoběžné s ρ. Přímku p_∞ nazýváme *nevlastní přímkou* roviny ρ.

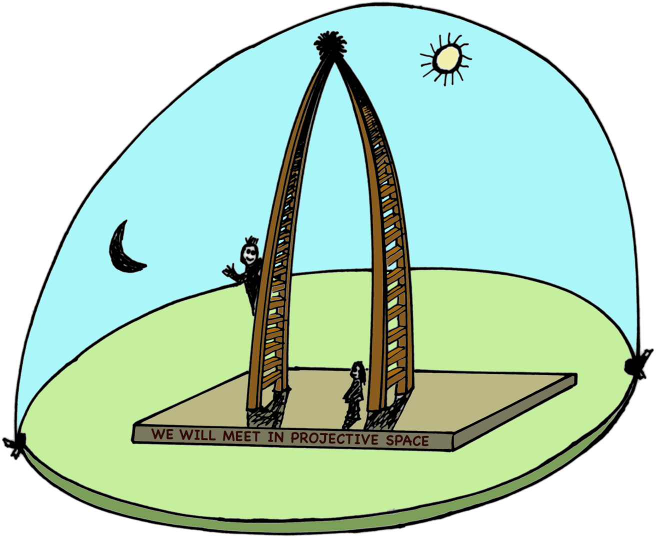
Projektivní rozšíření eukleidovského prostoru $\mathbb{RP}^3$

Ke každé přímce $p \in \mathbb{R}^3$ přidáme jeden bod P_∞, který je společný pro všechny rovnoběžky s p (směr). Bod P_∞ nazýváme *nevlastním bodem* přímky p.

Ke každé rovině $\rho \in \mathbb{R}^3$ přidáme jednu přímku p_∞, která je společná pro všechny roviny rovnoběžné s ρ. Přímku p_∞ nazýváme *nevlastní přímkou* roviny ρ.

K prostoru $\mathbb{R}^3$ přidáme rovinu ρ_∞, která je množinou všech nevlastních bodů a přímek prostoru $\mathbb{R}^3$. Rovinu ρ_∞ nazýváme *nevlastní rovinou* prostoru $\mathbb{R}^3$.

Projektivní rozšíření eukleidovského prostoru $\mathbb{RP}^3$



Projektivní rozšíření eukleidovského prostoru $\mathbb{RP}^3$

Definice ($\mathbb{RP}^3$)

Eukleidovský prostor $\mathbb{R}^3$ doplněný o nevlastní rovinu ρ_∞ nazýváme *projektivně rozšířený eukleidovský prostor*.
Zn. $\mathbb{RP}^3$.

Definice ($\mathbb{RP}^2$)

Eukleidovskou rovinu $\mathbb{R}^2$ doplněnou o nevlastní přímku p_∞ nazýváme *projektivně rozšířená eukleidovská rovina*.
Zn. $\mathbb{RP}^2$.

Princip duality

Každá věta geometrie roviny $\mathbb{RP}^2$ přechází v rovněž platnou *duální* větu geometrie roviny $\mathbb{RP}^2$, nahradíme-li v ní pojem bod pojmem přímka a naopak (případně jejich odvozenými pojmy ako průsečík, spojnice . . .).

- I1 Libovolnými dvěma různými body prochází právě jedna přímka.
- I1* Libovolné dvě různé přímky se protínají v právě jednom bodě.

Princip duality

V $\mathbb{RP}^3$ zaměňujeme pojem bod s pojmem rovina.

1 Pro každé tři nekolinární body A, B, C existuje právě jedna rovina ρ, která je s nimi incidentní.

1* Pro každé tři roviny $\alpha.\beta, \gamma$ neprocházejíci jednou přímkou existuje právě jeden bod P, který je s nimi incidentní.

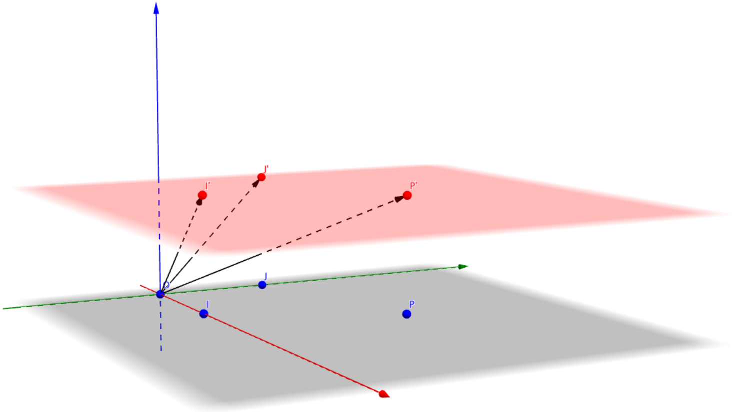
I1* Libovolné dvě různé roviny se protínají v právě jedné přímce.

Homogenní souřadnice - Motivace

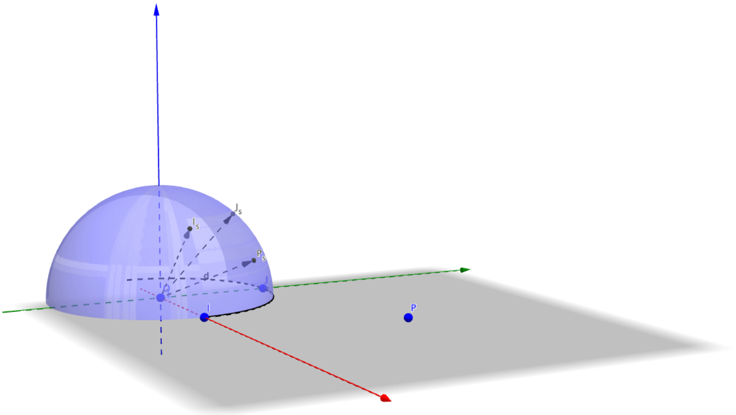
$X' = \mathbf{A}X + \overrightarrow{p}$ — nelíbí se nám, chtěli bychom jednu matici včetně posunutí

$ax + by + c = 0$ — rovnice přímky procházející daným bodem se dá napsat jednodušeji

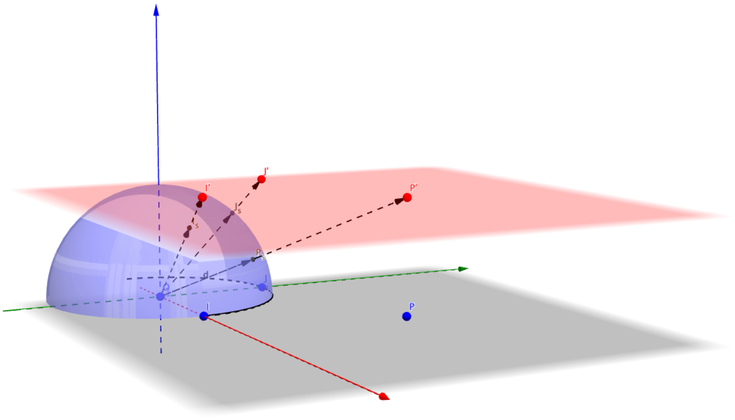
Homogenní souřadnice - Motivace



Homogenní souřadnice - Motivace



Homogenní souřadnice - Motivace



Homogenní souřadnice v $\mathbb{RP}^2$

Uspořádanou trojici $(x_1, x_2, x_0) \neq (0, 0, 0)$ nazýváme *homogenními souřadnicemi* bodu $X' \in \mathbb{RP}^2$.
Pozn. Někde taky (x_0, x_1, x_2).
Homogenní souřadnice jsou nezávislé na nenulovém násobku.
T.j. $(x_1, x_2, x_0) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_0)$ pro $\lambda \neq 0$.
Homogenní souřadnice určují bod X' jednoznačně.

Vlastní body:
Bodu $X = [x, y] \in \mathbb{R}^2$ odpovídá bod $X' = (x_1, x_2, x_0) \in \mathbb{RP}^2$, kde $x_0 \neq 0$.
Souřadnice bodu $X' = (x_1, x_2, x_0) = (\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, 1)$, t.j. $x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}$.
Pro $\lambda \neq 0$ platí $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_0) = (x_1, x_2, x_0)$.
X' nazýváme *vlastní bod* v $\mathbb{RP}^2$ pro $x_0 \neq 0$.

Homogenní souřadnice v $\mathbb{RP}^2$

Nevlastní body:

Nechť $X = [\kappa x, \kappa y] \in \mathbb{R}^2$, kterému odpovídá
$X' = (\kappa x, \kappa y, 1) \in \mathbb{RP}^2$.
$\lim_{\kappa \to \infty} (x, y, \frac{1}{\kappa}) = (x, y, 0)$
Směru $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ odpovídá bod $X'_\infty = (x, y, 0) \in \mathbb{RP}^2$.
X' nazýváme *nevlastní bod* v $\mathbb{RP}^2$ pro $x_0 = 0$.

Homogenní souřadnice v $\mathbb{RP}^2$

Uspořádanou trojici $\overrightarrow{u} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ nazýváme *homogenními souřadnicemi* přímky $p' \in \mathbb{RP}^2$.

Vlastní přímky:

Nechť je přímka v $\mathbb{R}^2$ dána obecnou rovnicí $p : ax + by + c = 0$.
V homogenních souřadnicích v $\mathbb{RP}^2$ máme
$p' : a\frac{x_1}{x_0} + b\frac{x_2}{x_0} + c = 0$, pro $x_0 \neq 0$, t.j.
$p' : ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0 = (a, b, c) \cdot (x_1, x_2, x_0) = \overrightarrow{u} \cdot X'$
pro $x_0 = 0$ dostáváme jako řešení souřadnice nevlastního bodu $(-b, a, 0)$

Homogenní souřadnice v $\mathbb{RP}^2$

Uspořádanou trojici $\overrightarrow{u} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ nazýváme *homogenními souřadnicemi* přímky $p' \in \mathbb{RP}^2$.

Vlastní přímky:
Nechť je přímka v $\mathbb{R}^2$ dána obecnou rovnicí $p : ax + by + c = 0$.
V homogenních souřadnicích v $\mathbb{RP}^2$ máme
$p' : a\frac{x_1}{x_0} + b\frac{x_2}{x_0} + c = 0$, pro $x_0 \neq 0$, t.j.
$p' : ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0 = (a, b, c) \cdot (x_1, x_2, x_0) = \overrightarrow{u} \cdot X'$
pro $x_0 = 0$ dostáváme jako řešení souřadnice nevlastního bodu $(-b, a, 0)$

Nevlastní přímka:
Přímka procházejíci nevlastními body např.
$I_\infty = (1, 0, 0), J_\infty = (0, 1, 0)$.
$p_\infty : (a, b, c) = I_\infty \times J_\infty = (0, 0, 1)$, t.j. obecná rovnice $x_0 = 0$.

Homogenní souřadnice v $\mathbb{RP}^3$

Uspořádanou čtveřici $(x_1, x_2, x_3, x_0) \neq (0, 0, 0, 0)$ nazýváme *homogenními souřadnicemi* bodu $X' \in \mathbb{RP}^3$.
Pro $\lambda \neq 0$ platí $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_0) = (x_1, x_2, x_3, x_0)$.

Vlastní body:
Pro $x_0 \neq 0$ odpovídá bodu $X = [\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}] \in \mathbb{R}^3$ vlastní bod $X' = (x_1, x_2, x_3, x_0) \in \mathbb{RP}^3$.

Homogenní souřadnice v $\mathbb{RP}^3$

Uspořádanou čtveřici $(x_1, x_2, x_3, x_0) \neq (0, 0, 0, 0)$ nazýváme *homogenními souřadnicemi* bodu $X' \in \mathbb{RP}^3$.
Pro $\lambda \neq 0$ platí $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_0) = (x_1, x_2, x_3, x_0)$.

Vlastní body:
Pro $x_0 \neq 0$ odpovídá bodu $X = [\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}] \in \mathbb{R}^3$ vlastní bod $X' = (x_1, x_2, x_3, x_0) \in \mathbb{RP}^3$.

Nevlastní body:
Pro $x_0 = 0$ odpovídá směru $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ nevlastní bod $X'_\infty = (x, y, z, 0) \in \mathbb{RP}^3$.

Homogenní souřadnice v $\mathbb{RP}^3$

Uspořádanou čtveřici $\overrightarrow{u} = (a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ nazýváme *homogenními souřadnicemi* roviny $\rho' \in \mathbb{RP}^3$.

Obecná rovnice roviny $\rho \in \mathbb{RP}^3$ je $\rho : ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_0 = 0$.
Nevlastní rovina má rovnici $x_0 = 0$.

Projektivní prostor $\mathbb{P}^n$

Definice (Projektivní prostor)

Nechť $\mathbf{V}_{n+1}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dimenze $n+1$; $n \geq 0$. Nechť $\sim$ je relace ekvivalence $\mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\overrightarrow{o}\}$ definována následovně: pro
$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_{n+1}, \overrightarrow{u} \sim \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}; 0 \neq \lambda \in \mathbb{T}$.
Projektivní prostor dimenze n je množina tříd ekvivalence
$\mathbb{P}^n(\mathbf{V}_{n+1}) = (\mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\overrightarrow{o}\})/\sim$.

Dále značíme jenom $\mathbb{P}^n$.

Prvky (body) projektivního prostoru $\mathbb{P}^n$ jsou jednodimenzionální podprostory $\mathbf{V}_{n+1}$:
$X = \langle \overrightarrow{v} \rangle = \{\overrightarrow{u} \in \mathbf{V}_{n+1}; \overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}; \lambda \neq 0; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

$\mathbb{P}^2$ . . . projektivní rovina
$X \in \mathbb{P}^2$ je geometrický bod v projektivní rovině
$\overrightarrow{v} \in \mathbf{V}^3$ takový, že $\langle \overrightarrow{v} \rangle = X$ je aritmetický zástupce bodu X.
Pozn. Každý bod $X \in \mathbb{P}^n$ má nekonečně mnoho artimetických zástupců.

Projektivní prostor $\mathbb{P}^n$

Definice (LZ a LNZ body)

Body $A_1 = \langle \overrightarrow{a_1} \rangle, \dots, A_k = \langle \overrightarrow{a_k} \rangle$ nazveme *lineárně závislé (nezávislé)*, když jsou lineárně závislé (nezávislé) vektory $\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k}$.

Definice (LK bodů)

Bod $A = \langle \overrightarrow{a} \rangle$ je *lineární kombinací* bodů $A_1, \dots, A_k$, jestliže vektor $\overrightarrow{a}$ je lineární kombinací vektorů $\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k}$.
Zn. $A = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_k A_k$.

Projektivní prostor $\mathbb{P}^n$

Definice (Projektivní systém souřadnic a aritmetická báze)

Projektivním systémem souřadnic (projektivním repérem, geometrickou bázi) prostoru $\mathbb{P}^n(\mathbf{V}_{n+1})$ rozumíme libovolnou uspořádanou $(n+2)$-tici bodů $(E_1, \dots, E_n, E_0; J)$ z $\mathbb{P}^n$ takových, že libovolných $(n+1)$ z nich je lineárně nezávislých.

Uspořádanou $(n+1)$-tici vektorů $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_0})$ nazýváme *aritmetickou bázi* vzhledem k projektivnímu systému souřadnic $(E_1, \dots, E_n, E_0; J)$ právě tehdy když $\overrightarrow{e_i}$ je aritmetickým zástupcem bodu E_i a *jednotkový bod* J má aritmetického zástupce $\sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{e_i}$.

$E_0, \dots, E_n$ - základní body
J - jednotkový bod

Projektivní prostor $\mathbb{P}^n$

Definice (Projektivní homogenní souřadnice)

$(n+1)$-tici $(x_1, \ldots, x_n, x_0) \in \mathbf{V}^{n+1}$ přiřazenou každému bodu $X \in \mathbb{P}^n$ nazýváme *projektivní homogenní souřadnice bodu X* vzhledem k projektivnímu systému souřadnic $(E_1, \ldots E_n, E_0; J)$ právě tehdy když existuje aritmetická báze $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_0})$ vzhledem k $(E_1, \ldots E_n, E_0; J)$, pro kterou platí $X = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n} + x_0\overrightarrow{e_0}$.

Projektivní podprostory

Definice (Projektivní podprostor)

Množina všech bodů v $\mathbb{P}^n$, které jsou lineární kombinací $k+1$ lineárně nezávislých bodů $X_0, X_1, \ldots, X_k$ se nazývá *k-rozměrný projektivní podprostor* $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$.

$k = 0 \ldots$ projektivní bod
$k = 1 \ldots$ projektivní přímka
$k = 2 \ldots$ projektivní rovina
$k = n-1 \ldots$ projektivní nadrovina
$k = -1 \ldots$ prázdná množina

Projektivní podprostory

Parametrické vyjádření podprostoru $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$, určeného $(k+1)$ lineárně nezávislými body $X_0, \ldots, X_k$:

$$X = \sum_{i=0}^{k} t_i X_i;\ \ t_i \in \mathbb{R}, (t_0, t_1, \ldots, t_k) \neq (0, 0, \ldots, 0)$$

Obecná rovnice nadroviny $\mathbb{P}^n$:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + a_0 x_0 = 0, \\ \text{pro } (a_0, a_1, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$$

Přechod od $\mathbb{P}^n$ k $\mathbb{A}^n$

Buď $\mathbb{P}^n$ projektivní prostor a $\mathbf{V}_{n+1}$ jeho (aritmetický) vektorový základ.
Volíme nadrovinu ω_0 s vektorovým základem $\mathbf{W}_n \subset \mathbf{V}_{n+1}$
V $\mathbb{P}^n$ volíme geometrickou bázi $(E_0, E_1, \ldots, E_n; J)$ tak, že
$E_1, \ldots, E_n \in \omega_0$ a $E_0, J \notin \omega_0$.
t.j. rovnice $\omega_0 : x_0 = 0$.

Nechť $\mathbf{A} = \mathbb{P}^n \setminus \omega_0 = \{\langle(x_1, \ldots, x_n, x_0)\rangle \in \mathbb{P}^n;\ x_0 \neq 0\}$.
$X, Y \in \mathbf{A}$:
$X = \langle \overrightarrow{x} \rangle;\ \overrightarrow{x} = (\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}, 1);\ \overrightarrow{x} = \frac{x_1}{x_0}\overrightarrow{e_1} + \cdots + \frac{x_n}{x_0}\overrightarrow{e_n} + \overrightarrow{e_0}$
$Y = \langle \overrightarrow{y} \rangle;\ \overrightarrow{y} = (\frac{y_1}{y_0}, \ldots, \frac{y_n}{y_0}, 1);\ \overrightarrow{y} = \frac{y_1}{y_0}\overrightarrow{e_1} + \cdots + \frac{y_n}{y_0}\overrightarrow{e_n} + \overrightarrow{e_0}$

Nechť f je zobrazení: $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{W}_n$
$f(X, Y) = \overrightarrow{XY} = (Y - X) = (\frac{y_1}{y_0} - \frac{x_1}{x_0})\overrightarrow{e_1} + \cdots + (\frac{y_n}{y_0} - \frac{x_n}{x_0})\overrightarrow{e_n}$.

Pak trojice $(\mathbf{A}, \mathbf{W}_n, f)$ je afinní prostor $\mathbb{A}^n$ s repérem $(E_0; \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$.
Obráceně umíme vytvořit *projektivně rozšířený afinní prostor*.

Projektivní zobrazení

Definice (Projektivní (kolineární) zobrazení)

Nechť $\mathbb{P}^n(\mathbf{V}_{n+1}), \mathbb{P}'^m(\mathbf{V}'_{m+1})$ jsou dva projektivní prostory a nechť zobrazení $\varphi : \mathbf{V}_{n+1} \to \mathbf{V}'_{m+1}$ je lineární zobrazení. Pak zobrazení $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}'^m$ definované předpisem $f(\langle \overrightarrow{u} \rangle) = \langle \varphi(\overrightarrow{u}) \rangle$ se nazývá *projektivní (kolineární) zobrazení*.

Definice (Kolineace)

Kolineace je vzájemně jednoznačné kolineární zobrazení.

Pozn. Kolineární zobrazení zobrazuje kolineární body X, Y, Z na kolineární body X', Y', Z' nebo do jednoho bodu $X' = Y' = Z'$.

Analytické vyjádření kolineárního zobrazení

$f : X \to X'$ indukováno $\varphi : \overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x'}$

$\mathbf{A}_{(m+1,n+1)}$ je matice lineárního zobrazení φ.
$\overrightarrow{x'} = \mathbf{A}\overrightarrow{x} = \varphi(\overrightarrow{x})$
$f(\langle\overrightarrow{x}\rangle) = \langle\varphi(\overrightarrow{x})\rangle = \langle\mathbf{A}\overrightarrow{x}\rangle = \langle\overrightarrow{x'}\rangle$
resp. $f(X) = \quad = \mathbf{A}X = X'$
Kolineární zobrazení je určeno až na násobek, t.j. třídou matic
$\widetilde{\mathbf{A}} = \{\rho\mathbf{A};\ \rho \in \mathbb{R};\ \rho \neq 0$ a platí $\varphi(\overrightarrow{x}) = \mathbf{A}\overrightarrow{x}\}$.

Matice kolineace v projektivní rovině $\mathbb{P}^2$ je: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$\mathbf{A}$ je regulární čtvercová matice, t.j. $(\det \mathbf{A} \neq 0)$.

Samodružné body

Samodružný bod kolineace

$$f : f(\langle \overrightarrow{x} \rangle) = \langle \overrightarrow{x} \rangle \qquad f(X) = X$$
$$\langle \overrightarrow{x} \rangle = \langle \mathbf{A} \overrightarrow{x} \rangle \qquad X = \mathbf{A}X$$
$$\lambda \overrightarrow{x} = \mathbf{A} \overrightarrow{x}, \lambda \neq 0 \qquad \lambda X = \mathbf{A}X$$
$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \overrightarrow{x} = 0 \qquad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})X = 0$$

Středová kolineace

Definice (Středová (osová) kolineace v rovině)

Středová (osová) kolineace je kolineace, která má přímku o samodružných bodů a nazýváme ji *osou kolineace* a samodružný bod $S \notin o$, který nazýváme *střed kolineace*. Body a jejich obrazy leží na přímkách procházejících středem S.

Středová kolineace je určena osou o, středem S a párem odpovídajících si bodů $A \to A'$.

Dvojpoměr

Definice (Dvojpoměr)

Nechť A, B, C, D jsou čtyři různé body na projektivní přímce a platí:

$$C = \gamma_1 A + \gamma_2 B$$
$$D = \delta_1 A + \delta_2 B,$$

potom číslo $(AB; CD) = \dfrac{\gamma_2 \delta_1}{\gamma_1 \delta_2}$ nazýváme dvojpoměr uspořádané čtveřice bodů A, B, C, D.

Pozn.: Bodu X můžeme přiřadit (projektivní) souřadnice přímky $X = \xi_1 A + \xi_2 B$.

Dvojpoměr

Volíme souřadnice bodů
$A = (1,0)$; $B = (0,1)$; $C = (\gamma_1, \gamma_2)$; $D = (\delta_1, \delta_2)$.
Dvojpoměr $(AB; CD)$ můžeme spočítat taky následovně:

$$(AB; CD) = \frac{\det(AC)\det(BD)}{\det(BC)\det(AD)} = \frac{\gamma_2\delta_1}{\gamma_1\delta_2}$$

Středová kolineace zachovává dvojpoměr (synteticky v $\mathbb{R}^2$)

Věta (Dvojpoměr bodů a přímek)

Nechť jsou dány čtyři různé body A, B, C, D na přímce p a bod O, který na ní neleží. Označme $\overline{AO} = a$ a podobně b, c, d Pak platí:

$$(AB; CD) = \frac{\sin(a, c)}{\sin(b, c)} : \frac{\sin(a, d)}{\sin(b, d)}.$$

$\sin(a, c)$ *je sinus orientovaného úhlu* $\sphericalangle(a, c)$.

Středová kolineace zachovává dvojpoměr (synteticky v $\mathbb{R}^2$)

Věta (Středová kolineace zachovává dvojpoměr)

Nechť jsou dány přímky p, p' a bod O, který neleží na žádné z nich. Promítneme-li čtyři různé body A, B, C, D přímky p z bodu O na přímku p' do bodů A', B', C', D', potom platí $(AB; CD) = (A'B'; C'D')$.

Kolineární zobrazení zachovává dvojpoměr

Věta (Kolineární zobrazení zachovává dvojpoměr)

Kolinární zobrazení čtyř různých bodů na čtyři různé body zachovává dvojpoměr.

Kolineární zobrazení zachovává dvojpoměr

Věta (Kolineární zobrazení zachovává dvojpoměr)

Kolinární zobrazení čtyř různých bodů na čtyři různé body zachovává dvojpoměr.

Důkaz

Nechť A, B, C, D jsou čtyři navzájem různé body na projektivní přímce v $\mathbb{P}^n$, potom platí:

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \gamma_1 \vec{a} + \gamma_2 \vec{b} \\ \vec{d} &= \delta_1 \vec{a} + \delta_2 \vec{b}, \end{aligned}$$

a $(AB; CD) = \dfrac{\gamma_2 \delta_1}{\gamma_1 \delta_2}$. *Buď f kolineární zobrazení indukované (prostým) lineárním zobrazením ϕ. Platí*
$\varphi(\vec{c}) = \varphi(\gamma_1 \vec{a} + \gamma_2 \vec{b}) = \gamma_1 \varphi(\vec{a}) + \gamma_2 \varphi(\vec{b})$, *a analogicky pro* $\varphi(\vec{d})$.
Dvojpoměr bodů $(\langle \varphi(\vec{a}) \rangle, \langle \varphi(\vec{b}) \rangle; \langle \varphi(\vec{c}) \rangle, \langle \varphi(\vec{d}) \rangle)$ *je taky* $\dfrac{\gamma_2 \delta_1}{\gamma_1 \delta_2}$.

Kuželosečka jako rovnice v $\mathbb{R}^2$

Kuželosečka v eukleidovské rovině je množina bodů $X = [x, y]$ takových, že platí:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

Kuželosečka jako rovnice v $\mathbb{R}^2$

Kuželosečka v eukleidovské rovině je množina bodů $X = [x, y]$ takových, že platí:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \text{ obyčejně pro } (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Kuželosečka jako rovnice v $\mathbb{R}^2$

Kuželosečka v eukleidovské rovině je množina bodů $X = [x, y]$ takových, že platí:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \text{ obyčejně pro } (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Přechod do homogenních souřadnic v $\mathbb{RP}^2$:
$x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}, x_0 \neq 0.$

$$a(\frac{x_1}{x_0})^2 + 2b\frac{x_1}{x_0}\frac{x_2}{x_0} + c(\frac{x_2}{x_0})^2 + 2d\frac{x_1}{x_0} + 2e\frac{x_2}{x_0} + f = 0$$

Kuželosečka jako rovnice v $\mathbb{R}^2$

Kuželosečka v eukleidovské rovině je množina bodů $X = [x, y]$ takových, že platí:

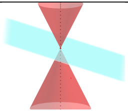
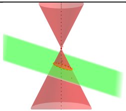
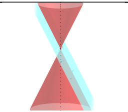
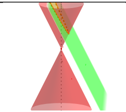
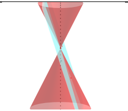
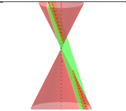
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \text{ obyčejně pro } (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Přechod do homogenních souřadnic v $\mathbb{RP}^2$:
$x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}, x_0 \neq 0.$

$$a\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + 2b\frac{x_1}{x_0}\frac{x_2}{x_0} + c\left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 + 2d\frac{x_1}{x_0} + 2e\frac{x_2}{x_0} + f = 0$$
$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1x_0 + 2ex_2x_0 + fx_0^2 = 0$$

Kuželosečka jako řez kolmé kuželové plochy v $\mathbb{R}^3$

κ - kuželová plocha s osou o a vrcholem V, $\varphi \in (0, \frac{pi}{2})$ - odchylka površky kuželu od o, ρ - rovina, $\psi \in \langle 0, \frac{pi}{2} \rangle$ - $\sphericalangle(\rho, o)$

♡	singulární $V \in \rho$		regulární $V \notin \rho$	
$\varphi < \psi$		1 bod		elipsa
$\varphi = \psi$		přímka^2		parabola
$\varphi > \psi$		2 různoběžky		hyperbola

Formy

Pro $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_0), \overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_0) \in \mathbf{V}^{n+1}$
Pozn. užíváme $n+1$ pro naše účely, lze samozřejmě následovné ekvivalentně zavést nad $\mathbf{V}^n$

Lineární forma (definice např. v Sekanina a kol: Geometrie I):
$f : \mathbf{V}^{n+1} \to \mathbb{T}; f(\overrightarrow{x}) = \mathbf{A}\overrightarrow{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_0x_0$.
$f(\overrightarrow{x}) = 0$ je rovnice nadroviny.
Matice lin. f. je $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_0)$.

Formy

Pro $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_0), \overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \dots, y_0) \in \mathbf{V}^{n+1}$
Pozn. užíváme $n+1$ pro naše účely, lze samozřejmě následovné ekvivalentně zavést nad $\mathbf{V}^n$

Lineární forma (definice např. v Sekanina a kol: Geometrie I):
$f : \mathbf{V}^{n+1} \to \mathbb{T}; f(\overrightarrow{x}) = \mathbf{A}\overrightarrow{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_0x_0$.
$f(\overrightarrow{x}) = 0$ je rovnice nadroviny.
Matice lin. f. je $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \dots, a_0)$.

Bilineární forma (definice např. v Sekanina a kol.: Geometrie II):
$f : \mathbf{V}^{n+1} \times \mathbf{V}^{n+1} \to \mathbb{T}; f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x}^T \mathbf{A} \overrightarrow{y}$.
Matice bilin. f. je $(n+1) \times (n+1)$.

Formy

Symetrická bilineární forma je bilineární forma f taková, že $f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})$.
Matice sym. bilin. formy je symetrická, např. pro $n = 2$ je:

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

$$f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = (x_1, x_2, x_0) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Formy

Kvadratická forma:
$f_2 : \mathbf{V} \to \mathbb{T}$; $f_2(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$, kde f je symetrická bilineární forma, která ji určuje (indukuje), nazýváme ji *polární forma* k f_2.

$$f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = f_2(X) = (x_1, x_2, x_0) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} =$$

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1x_0 + 2ex_2x_0 + fx_0^2$$

Formy

Kvadratická forma:
$f_2 : \mathbf{V} \to \mathbb{T}$; $f_2(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$, kde f je symetrická bilineární forma, která ji určuje (indukuje), nazýváme ji *polární forma* k f_2.

$$f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = f_2(X) = (x_1, x_2, x_0) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} =$$
$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1x_0 + 2ex_2x_0 + fx_0^2$$

Definice (Kvadrika)

Nechť je dána nenulová kvadratická forma f_2 na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ dimenze $n+1$ nad tělesem $\mathbb{C}$. Množinu $\mathcal{Q}$ všech bodů $X = \langle \overrightarrow{x} \rangle \in \mathbb{CP}^n$, pro které platí $f_2(X) = 0$ nazýváme *kvadrika*. Pro $n = 2$ se kvadrika nazývá *kuželosečka*. *Maticí kvadriky* $\mathbf{A}$ nazýváme matici její kvadratické formy.

Kvadrika

Bod $X = (x_1, x_2, x_0)$ leží na kuželosečce $\mathcal{Q}$, když platí:

$$X^T\mathbf{A}X = (x_1, x_2, x_0)\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = 0$$

Kvadrika

Bod $X = (x_1, x_2, x_3, x_0)$ leží na kvadrice $\mathcal{Q}$ když platí:

$$X^T \mathbf{A} X = (x_1, x_2, x_3, x_0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_0 \end{pmatrix} = 0$$

Vlastnosti kvadrik

Definice (Imaginární / reálná kvadrika)

Jestliže rovnici kvadriky nevyhovují reálné souřadnice žádného bodu, nazýváme ji *imaginární kvadrika (formálně reálná)*, v opačném případě ji nazýváme *bodově reálná*.

Vlastnosti kvadrik

Definice (Imaginární / reálná kvadrika)

Jestliže rovnici kvadriky nevyhovují reálné souřadnice žádného bodu, nazýváme ji *imaginární kvadrika (formálně reálná)*, v opačném případě ji nazýváme *bodově reálná*.

Definice (Hodnost a regulárnost kvadriky)

Hodnost matice kvadriky je *hodnost kvadriky*.
Je-li matice kvadriky regulární (singulární), potom nazýváme *kvadriku regulární (singulární)*.

Polarita

Definice

Body $P, Q =\in \mathbb{CP}^n$ jsou *polárně sdružené (konjugované)* vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$ s maticí $\mathbf{A}$, jestliže platí $P^T \mathbf{A} Q = 0$

Polarita

Definice

Body $P, Q = \in \mathbb{CP}^n$ jsou *polárně sdružené (konjugované)* vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$ s maticí $\mathbf{A}$, jestliže platí $P^T \mathbf{A} Q = 0$

Věta

Je-li P polárně sdružený s 2 různými body U, V vzhledem ke kuželosečce $\mathcal{Q}$ s maticí $\mathbf{A}$, potom je polárně sdružený s každým bodem W přímky $\overleftrightarrow{UV}$.

Polarita

Definice

Body $P, Q =\in \mathbb{CP}^n$ jsou *polárně sdružené (konjugované)* vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$ s maticí $\mathbf{A}$, jestliže platí $P^T\mathbf{A}Q = 0$

Věta

Je-li P polárně sdružený s 2 různými body U, V vzhledem ke kuželosečce $\mathcal{Q}$ s maticí $\mathbf{A}$, potom je polárně sdružený s každým bodem W přímky $\overleftrightarrow{UV}$.

Důkaz

$W = \alpha U + \beta V$

$P^T\mathbf{A}W = P^T\mathbf{A}(\alpha U + \beta V) = \alpha P^T\mathbf{A}U + \beta P^T\mathbf{A}V = 0$

Polarita

Definice

Body $P, Q = \in \mathbb{CP}^n$ jsou *polárně sdružené (konjugované)* vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$ s maticí $\mathbf{A}$, jestliže platí $P^T \mathbf{A} Q = 0$

Věta

Je-li P polárně sdružený s 2 různými body U, V vzhledem ke kuželosečce $\mathcal{Q}$ s maticí $\mathbf{A}$, potom je polárně sdružený s každým bodem W přímky $\overleftrightarrow{UV}$.

Důkaz

$W = \alpha U + \beta V$
$P^T \mathbf{A} W = P^T \mathbf{A}(\alpha U + \beta V) = \alpha P^T \mathbf{A} U + \beta P^T \mathbf{A} V = 0$

Pozn. stejně taky pro rovinu v $\mathbb{CP}^3$.

Regulární a singulární body

Definice (Regulární a singulární body)

Bod P nazveme *singulární bod kvadriky* $\mathcal{Q}$, je-li polárně sdružen se všemi body prostoru $\mathbb{CP}^n$. Body kvadriky, které nejsou singulární, nazveme *regulární body kvadriky*.

Regulární a singulární body

Definice (Regulární a singulární body)

Bod P nazveme *singulární bod kvadriky* $\mathcal{Q}$, je-li polárně sdružen se všemi body prostoru $\mathbb{CP}^n$. Body kvadriky, které nejsou singulární, nazveme *regulární body kvadriky*.

Věta

Nechť $P \in \mathcal{Q}$ je singulární bod kvadriky $\mathcal{Q}$ a bod $Q \neq P$ leží na $\mathcal{Q}$, potom přímka $\overleftrightarrow{PQ}$ leží na kvadrice $\mathcal{Q}$.

Regulární a singulární body

Definice (Regulární a singulární body)

Bod P nazveme *singulární bod kvadriky* $\mathcal{Q}$, je-li polárně sdružen se všemi body prostoru $\mathbb{CP}^n$. Body kvadriky, které nejsou singulární, nazveme *regulární body kvadriky*.

Věta

Nechť $P \in \mathcal{Q}$ je singulární bod kvadriky $\mathcal{Q}$ a bod $Q \neq P$ leží na $\mathcal{Q}$, potom přímka $\overleftrightarrow{PQ}$ leží na kvadrice $\mathcal{Q}$.

Důkaz (Expresne)

$$(\alpha P+\beta Q)^T\mathbf{A}(\alpha P+\beta Q) = \alpha^2 P^T\mathbf{A}P+2\alpha\beta P^T\mathbf{A}Q+\beta^2 Q^T\mathbf{A}Q = 0$$

Pól a polára

Definice (Pól a polára)

Nechť P není singulární bod kvadriky $\mathcal{Q}$, pak nadrovinu bodů v $\mathbb{CP}^n$ polárně sdružených s P nazýváme *polární nadrovinou pólu* P vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$.

v $\mathbb{CP}^2$: pól $\leftrightarrow$ polára
v $\mathbb{CP}^3$: pól $\leftrightarrow$ polární rovina

Pól a polára

Definice (Pól a polára)

Nechť P není singulární bod kvadriky $\mathcal{Q}$, pak nadrovinu bodů v $\mathbb{CP}^n$ polárně sdružených s P nazýváme *polární nadrovinou pólu P* vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$.

v $\mathbb{CP}^2$: pól $\leftrightarrow$ polára
v $\mathbb{CP}^3$: pól $\leftrightarrow$ polární rovina

Polární nadrovina bodu P vzhledem ke $\mathcal{Q}$ s maticí $\mathbf{A}$ má obecnou rovnici:

$$P^T \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Pól a polára

Věta (Vzájemnost pólu a polární nadroviny)

Nechť různé body P, Q nejsou singulární body kvadriky $\mathcal{Q}$ s maticí $\mathbf{A}$. Leží-li bod Q v polární nadrovině bodu P, potom leží i bod P v polární nadrovině bodu Q vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$.

Pól a polára

Věta (Vzájemnost pólu a polární nadroviny)

Nechť různé body P, Q nejsou singulární body kvadriky $\mathcal{Q}$ s maticí $\mathbf{A}$. Leží-li bod Q v polární nadrovině bodu P, potom leží i bod P v polární nadrovině bodu Q vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$.

Důkaz

Polární nadrovina bodu P je množina bodů $X = (x_1, \ldots, x_n, x_0)$, že $P^T\mathbf{A}X = 0 \Rightarrow P^T\mathbf{A}Q = 0$, ale $P^T\mathbf{A}Q = Q^T\mathbf{A}P$ ze symetrie $\mathbf{A}$.

Pól a polára

Definice (Tečná nadrovina)

Nechť T je regulární bod kvadriky $\mathcal{Q}$. Polární nadrovinu bodu T vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$ nazýváme *tečná nadrovina* a bod T její *bod dotyku*.

Pól a polára

Definice (Tečná nadrovina)

Nechť T je regulární bod kvadriky $\mathcal{Q}$. Polární nadrovinu bodu T vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$ nazýváme *tečná nadrovina* a bod T její *bod dotyku*.

Věta

Tečné nadroviny vedené ke kvadrice $\mathcal{Q}$ z bodu $P \notin \mathcal{Q}$ se jí dotýkají v bodech, v nichž polární nadrovina bodu P vzhledem ke $\mathcal{Q}$ protíná kvadriku $\mathcal{Q}$.

Pól a polára

Definice (Tečná nadrovina)

Nechť T je regulární bod kvadriky $\mathcal{Q}$. Polární nadrovinu bodu T vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$ nazýváme *tečná nadrovina* a bod T její *bod dotyku*.

Věta

Tečné nadroviny vedené ke kvadrice $\mathcal{Q}$ z bodu $P \notin \mathcal{Q}$ se jí dotýkají v bodech, v nichž polární nadrovina bodu P vzhledem ke $\mathcal{Q}$ protíná kvadriku $\mathcal{Q}$.

Důkaz

Důsledek definice tečné nadroviny a věty o vzájemnosti pólu a polární nadroviny.

Matice kvadriky vzhledem k polární bázi

Je-li $\mathbf{A}$ matice kvadriky, lze ji převést pomocí symetrických řádkových a (analogických) sloupcových úprav na diagonální matici $\mathbf{A}'$. Matice $\mathbf{A}'$ se nazývá matice kvadriky vzhledem k *polární bázi*.

Matice kvadriky vzhledem k polární bázi

Je-li **A** matice kvadriky, lze ji převést pomocí symetrických řádkových a (analogických) sloupcových úprav na diagonální matici $\mathbf{A}'$. Matice $\mathbf{A}'$ se nazývá matice kvadriky vzhledem k *polární bázi*.

Příklad

$c: \; x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 8x_0x_2 - 4x_0^2 = 0$

Matice kvadriky vzhledem k polární bázi

Je-li **A** matice kvadriky, lze ji převést pomocí symetrických řádkových a (analogických) sloupcových úprav na diagonální matici **A**′. Matice **A**′ se nazývá matice kvadriky vzhledem k *polární bázi*.

Příklad

$c: \; x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 8x_0x_2 - 4x_0^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

Matice kvadriky vzhledem k polární bázi

Je-li **A** matice kvadriky, lze ji převést pomocí symetrických řádkových a (analogických) sloupcových úprav na diagonální matici **A**′. Matice **A**′ se nazývá matice kvadriky vzhledem k *polární bázi*.

Příklad

$c: \; x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 8x_0x_2 - 4x_0^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \left[\text{2.-1.ř} \right. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Matice kvadriky vzhledem k polární bázi

Je-li **A** matice kvadriky, lze ji převést pomocí symetrických řádkových a (analogických) sloupcových úprav na diagonální matici $\mathbf{A}'$. Matice $\mathbf{A}'$ se nazývá matice kvadriky vzhledem k *polární bázi*.

Příklad

$c: \; x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 8x_0x_2 - 4x_0^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \left[2.\text{-}1.\text{ř} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} 2.\text{-}1.\text{s} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \right]$$

Matice kvadriky vzhledem k polární bázi

Je-li **A** matice kvadriky, lze ji převést pomocí symetrických řádkových a (analogických) sloupcových úprav na diagonální matici **A**′. Matice **A**′ se nazývá matice kvadriky vzhledem k *polární bázi*.

Příklad

$c:\ x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 8x_0x_2 - 4x_0^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \left[2.\text{-}1.\text{ř} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} 2.\text{-}1.\text{s} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

Matice kvadriky vzhledem k polární bázi

Je-li $\mathbf{A}$ matice kvadriky, lze ji převést pomocí symetrických řádkových a (analogických) sloupcových úprav na diagonální matici $\mathbf{A}'$. Matice $\mathbf{A}'$ se nazývá matice kvadriky vzhledem k *polární bázi*.

Příklad

$c: \; x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 8x_0x_2 - 4x_0^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \left[2.\text{-}1.\text{ř} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} 2.\text{-}1.\text{s} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\left[2.\text{+}3.\text{ř} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} 2.\text{+}3.\text{s} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$c': \; x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_0^2 = 0$

Pozn. Konvence: matici upravujeme tak, aby na diagonále bylo vždy více kladných čísel. Resp. vynásobíme celou matici (-1).
POZOR: provádíme kolineace, které nezachovávají afinní vlastnosti, matici nemůžeme použít dále pro afinní klasifikaci.

Signatura kvadratické formy

Definice

Je-li $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonální matice, pak trojici (n, p, q), kde n je počet nul, p je počet kladných čísel a q je počet záporných čísel na diagonále nazýváme *signaturou matice* $\mathbf{A}$.

Signaturou kvadratické formy nazýváme signaturu její matice vůči polární bázi.

Projektivní klasifikace kuželoseček

Typy kuželoseček v $\mathbb{CP}^2$
Kuželosečka $\mathcal{Q} : X^T \mathbf{A} X = 0$
$h(\mathbf{A})$ hodnost matice kuželosečky:

hodnost	signatura	$\mathbb{R}$ body	rovnice	projektivní typ v $\mathbb{CP}^2$
$h(\mathbf{A}) = 3$	$(0,3,0)$	$\emptyset$ $\mathbb{R}$ bodů	$x_1^2 + x_2^2 + x_0^2 = 0$	$\mathbb{I}$ regulární KS
$h(\mathbf{A}) = 3$	$(0,2,1)$	obsahuje $\mathbb{R}$ body	$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$	$\mathbb{R}$ regulární KS (el., par., hyp.)
$h(\mathbf{A}) = 2$	$(1,2,0)$	1 $\mathbb{R}$ bod	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2 $\mathbb{I}$ přímky
$h(\mathbf{A}) = 2$	$(1,1,1)$	obsahuje $\mathbb{R}$ body	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	2 $\mathbb{R}$ přímky
$h(\mathbf{A}) = 1$	$(2,1,0)$	obsahuje $\mathbb{R}$ body	$x_1^2 = 0$	2-násobná $\mathbb{R}$ přímka

Projektivní klasifikace kvadrik

Typy kvadrik v $\mathbb{CP}^3$

hodnost	signatura	$\mathbb{R}$ body	rovnice	projektivní typ v $\mathbb{CP}^3$
$h(\mathbf{A}) = 4$	$(0, 4, 0)$	$\emptyset$ $\mathbb{R}$ bodů	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_0^2 = 0$	$\mathbb{I}$ regulární
$h(\mathbf{A}) = 4$	$(0, 3, 1)$	obsahuje $\mathbb{R}$ body	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = 0$	$\mathbb{R}$ regulární (nepřímková)
$h(\mathbf{A}) = 4$	$(0, 2, 2)$	obsahuje $\mathbb{R}$ body	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_0^2 = 0$	$\mathbb{R}$ regulární (přímková)
$h(\mathbf{A}) = 3$	$(1, 3, 0)$	1 $\mathbb{R}$ bod	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	$\mathbb{I}$ kuželová plocha
$h(\mathbf{A}) = 3$	$(1, 2, 1)$	obsahuje $\mathbb{R}$ body	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	$\mathbb{R}$ kuželová plocha
$h(\mathbf{A}) = 2$	$(2, 2, 0)$	přímka $\mathbb{R}$ bodů	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2 $\mathbb{I}$ roviny
$h(\mathbf{A}) = 2$	$(2, 1, 1)$	obsahuje $\mathbb{R}$ body	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	2 $\mathbb{R}$ roviny
$h(\mathbf{A}) = 1$	$(3, 1, 0)$	obsahuje $\mathbb{R}$ body	$x_1^2 = 0$	2-násobná $\mathbb{R}$ rovina

Afinní vlastnosti a klasifikace.

Kvadriky v projektivním rozšíření afinního prostoru $\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{C}}$ rozlišujeme podle počtu (resp. množin) nevlastních bodů (asymptotických směrů). Z afinních vlastností zjistíme u kuželoseček jejich asymptoty (tečny v nevlastních bodech), sdružené průměry (body polárně sdružené k nevlastním) a z nich střed (vlastní/ nevlastní) a středovost kuželosečky (středová/ nestředová).

Matice kuželosečky

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

označme $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} b & d \\ c & e \end{pmatrix}$ $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \end{pmatrix}$ $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

Sdružené směry, průměrové nadroviny

Definice (Průměrová nadrovina)

Nechť U_∞ je nevlastní bod (směr), který není bodem kvadriky $\mathcal{Q}$ v $\overline{\mathbb{A}}_\mathbb{C}$. Polární nadrovina bodu U_∞ vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$ se nazývá *průměrová nadrovina* kvadriky.
V $\overline{\mathbb{A}}^2_\mathbb{C}$ nazýváme průměrovou nadrovinu průměr.
Průměry, z nichž každý je sdružený se směrem druhého se nazývají *sdružené průměry*.

Asymptotické směry, asymptoty

Definice (Asymptotický směr)

Nevlastní bod kvadriky v $\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{C}}$ se nazývá *asymptotický směr* kvadriky.

T.j. hledáme všechny body kvadriky, pro které platí $x_0 = 0$. Dosazením do rovnice KS je to tedy množina nevlastních bodů splňující $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = 0$.
Obecně pro $x_1 \neq 0$ je $\langle (x_1, x_2, 0) \rangle = \langle (1, \frac{x_2}{x_1}, 0) \rangle$ a máme kvadratickou rovnici s koeficienty $a, 2b, c$ která má

- 2 reálné kořeny (nevlastní body) pro $b^2 - ac > 0$ reg: hyperbola , sing: 2 $\mathbb{I}, \mathbb{R}$ různoběžky.
- 1 dvojnásobný reálný kořen (nevlastní bod) pro $b^2 - ac = 0$ reg: parabola, sing: 2 $\mathbb{I}, \mathbb{R}$ rovnoběžky, 1 vlastní a 1 nevlastní přímka, 1 dvojnásobná přímka.
- žádný reálný kořen pro $b^2 - ac < 0$ reg: $\mathbb{I}, \mathbb{R}$ elipsa.

Z matice $b^2 - ac = -\det \mathbf{A}_3$

Definice (Asymptotická nadrovina)

Tečná nadrovina v nevlastním bodě kvadriky se nazývá *asymptotická nadrovina* kvadriky.
Tečna v nevlastním bodě $\rightarrow$ asymptota v $\overline{\mathbb{A}}^2_{\mathbb{C}}$.

Definice (Asymptotická nadrovina)

Tečná nadrovina v nevlastním bodě kvadriky se nazývá *asymptotická nadrovina* kvadriky.
Tečna v nevlastním bodě $\rightarrow$ asymptota v $\overline{\mathbb{A}}^2_{\mathbb{C}}$.

T.j. polára asymptotického směru vzhledem ke KS je asymptota.

Střed

Definice (Střed)

Bod S nazýváme *středem kvadriky*, je-li polárně sdružen s každým nevlastním bodem prostoru $\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{C}}$ vzhledem ke kvadrice.

Střed

Definice (Střed)

Bod S nazýváme *středem kvadriky*, je-li polárně sdružen s každým nevlastním bodem prostoru $\overline{\mathbb{A}_\mathbb{C}}$ vzhledem ke kvadrice.

T.j. u KS v obecném případě volíme dva nevlastní body $I_\infty = (1, 0, 0), J_\infty = (0, 1, 0)$ a střed je průsečíkem jejich průměrů.

Střed

Definice (Střed)

Bod S nazýváme *středem kvadriky*, je-li polárně sdružen s každým nevlastním bodem prostoru $\overline{\mathbb{A}_{\mathbb{C}}}$ vzhledem ke kvadrice.

T.j. u KS v obecném případě volíme dva nevlastní body $I_\infty = (1, 0, 0), J_\infty = (0, 1, 0)$ a střed je průsečíkem jejich průměrů.

$$i : (1, 0, 0)\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = ax_1 + bx_2 + dx_0 = 0; \quad j : (0, 1, 0)\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = bx_1 + cx_2 + ex_0 = 0$$

Střed

Definice (Střed)

Bod S nazýváme *středem kvadriky*, je-li polárně sdružen s každým nevlastním bodem prostoru $\overline{\mathbb{A}_{\mathbb{C}}}$ vzhledem ke kvadrice.

T.j. u KS v obecném případě volíme dva nevlastní body $I_\infty = (1,0,0), J_\infty = (0,1,0)$ a střed je průsečíkem jejich průměrů.

$$i:(1,0,0)\mathbf{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_0\end{pmatrix} = ax_1+bx_2+dx_0=0;\quad j:(0,1,0)\mathbf{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_0\end{pmatrix} = bx_1+cx_2+ex_0=0$$

Průsečík průměrů i, j je
$(a,b,d)\times(b,c,e) = (\det \mathbf{A}_1, -\det \mathbf{A}_2, \det \mathbf{A}_3) = (s_1, s_2, s_0)$ - souřadnice středu S.

Střed

Definice (Středovost kvadriky)

Kvadrika, která má alespoň jeden vlastní střed se nazývá *středová, centrická*. V opačném případě se nazývá *nestředová*.

Několik důsledků přímo z definic:
Singulární bod KS je středem KS.
Průměry KS prochází středem KS.
Asymptoty KS prochází středem KS.

Středové kuželosečky jsou reg: $\mathbb{I}, \mathbb{R}$ elipsa, hyperbola a sing: 2 $\mathbb{I}, \mathbb{R}$ vlastní různoběžky.

Vedlejší signatura

Signaturu kvadratické formy vůči polární bázi dále nazýváme *hlavní signatura*.

Definice (Vedlejší signatura)

Signaturu matice kvadratické formy s vynechaným posledním řádkem a posledním sloupcem nazýváme *vedlejší signatura*.

Afinní klasifikace kuželoseček

hlavní sgn	vedlejší sgn	∞ body	rovnice	afinní typ v $\mathbb{CP}^2$
$(0,3,0)$	$(0,2,0)$	$\emptyset$	$x_1^2 + x_2^2 + x_0^2 = 0$	$\mathbb{I}$ elipsa
$(0,2,1)$	$(0,2,0)$	$\emptyset$	$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$	$\mathbb{R}$ elipsa
$(0,2,1)$	$(0,1,1)$	2	$x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0$	$\mathbb{R}$ hyperbola
$(0,2,1)$	$(1,1,0)$	1	$x_1^2 + 2x_0x_2 = 0$	$\mathbb{R}$ parabola
$(1,2,0)$	$(0,2,0)$	2	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2 $\mathbb{I}$ různoběžky
$(1,2,0)$	$(1,1,0)$	1	$x_1^2 + x_0^2 = 0$	2 $\mathbb{I}$ rovnoběžky
$(1,1,1)$	$(0,1,1)$	2	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	2 $\mathbb{R}$ různoběžky
$(1,1,1)$	$(1,1,0)$	1	$x_1^2 - x_0^2 = 0$	2 $\mathbb{R}$ rovnoběžky
$(1,1,1)$	$(2,0,0)$	přímka	$x_0x_2 = 0$	vlastní $\mathbb{R}$ a nevlastní $\mathbb{R}$ přímka
$(2,1,0)$	$(1,1,0)$	1	$x_1^2 = 0$	2-násobná $\mathbb{R}$ přímka
$(2,1,0)$	$(2,0,0)$	přímka	$x_0^2 = 0$	2-násobná nevlastní $\mathbb{R}$ přímka

Afinní klasifikace kvadrik

hlavní sgn	vedlejší sgn	∞ body	rovnice	afinní typ v $\mathbb{CP}^3$
$(0,4,0)$	$(0,3,0)$	$\emptyset$	$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_0^2=0$	$\mathbb{I}$ elipsoid
$(0,3,1)$	$(0,3,0)$	$\emptyset$	$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2=0$	$\mathbb{R}$ elipsoid
$(0,3,1)$	$(0,2,1)$	reg. KS	$x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_0^2=0$	$\mathbb{R}$ dvojdílný hyperboloid
$(0,3,1)$	$(1,2,0)$	1	$x_1^2+x_2^2+2x_3x_0=0$	$\mathbb{R}$ eliptický paraboloid
$(0,2,2)$	$(0,2,1)$	reg. KS	$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_0^2=0$	$\mathbb{R}$ jednodílný hyperboloid
$(0,2,2)$	$(1,1,1)$	2 různoběžky	$x_1^2-x_2^2+2x_3x_0=0$	$\mathbb{R}$ hyperbolický paraboloid
$(1,3,0)$	$(0,3,0)$	reg. KS	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$	$\mathbb{I}$ kuželová plocha
$(1,3,0)$	$(1,2,0)$	1	$x_1^2+x_2^2+x_0^2=0$	$\mathbb{I}$ válcová plocha
$(1,2,1)$	$(0,2,1)$	reg. KS	$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$	$\mathbb{R}$ kuželová plocha
$(1,2,1)$	$(1,2,0)$	1	$x_1^2+x_2^2-x_0^2=0$	$\mathbb{R}$ eliptická válcová plocha
$(1,2,1)$	$(1,1,1)$	2 různoběžky	$x_1^2-x_2^2-x_0^2=0$	$\mathbb{R}$ hyperbolická válcová plocha
$(1,2,1)$	$(2,1,0)$	2-násobná přímka	$x_1^2+2x_2x_0=0$	$\mathbb{R}$ parabolická válcová plocha
...				

Afinní klasifikace kvadrik

hlavní sgn	vedlejší sgn	∞ body	rovnice	afinní typ v $\mathbb{CP}^3$
...				
(2, 2, 0)	(1, 2, 0)	2 různoběžky	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2 $\mathbb{I}$ různoběžné roviny
(2, 2, 0)	(2, 1, 0)	2-násobná přímka	$x_1^2 + x_0^2 = 0$	2 $\mathbb{I}$ rovnoběžné roviny
(2, 1, 1)	(1, 1, 1)	2 různoběžky	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	2 $\mathbb{R}$ různoběžné roviny
(2, 1, 1)	(2, 1, 0)	2-násobná přímka	$x_1^2 - x_0^2 = 0$	2 $\mathbb{R}$ rovnoběžné roviny
(2, 1, 1)	(3, 0, 0)	rovina body	$x_1 x_0 = 0$	vlastní $\mathbb{R}$ a nevlastní $\mathbb{R}$ rovina
(3, 1, 0)	(2, 1, 0)	přímka	$x_1^2 = 0$	2-násobná $\mathbb{R}$ rovina
(3, 1, 0)	(3, 0, 0)	rovina	$x_0^2 = 0$	2-násobná nevlastní $\mathbb{R}$ rovina

Metrické vlastnosti kuželoseček

Kuželosečky v projektivním rozšíření komplexního prostoru $\mathbb{CP}^n$ rozlišujeme podle metrických vlastností, t.j. hlavní směry (směry sdružené s kolmými) a jejich poláry - osy souměrnosti. Průsečíky os souměrnosti a kuželosečky jsou vrcholy.

Hlavní směry

Definice (Hlavní směry)

Směr určený vektorem $\vec{o} \neq \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ nazýváme *hlavním směrem* kuželosečky c, je-li polárně sdružen s vzájemně kolmým směrem vzhledem ke kuželosečce c.

Hlavní směry

Definice (Hlavní směry)

Směr určený vektorem $\vec{o} \neq \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ nazýváme *hlavním směrem* kuželosečky *c*, je-li polárně sdružen s vzájemně kolmým směrem vzhledem ke kuželosečce *c*.

Věta

Ke každé kuželosečce existují alespoň dva na sebe kolmé hlavní směry. Jsou to vlastní vektory matice $\mathbf{A}_3$ *(z předešlého značení).*

Hlavní směry

Věta

Ke každé kuželosečce existují alespoň dva na sebe kolmé hlavní směry. Jsou to vlastní vektory matice $\mathbf{A}_3$ *(z předešlého značení).*

Hlavní směry

Věta

Ke každé kuželosečce existují alespoň dva na sebe kolmé hlavní směry. Jsou to vlastní vektory matice $\mathbf{A}_3$ *(z předešlého značení).*

$$\vec{u}^T \mathbf{A} \vec{v} = (u_1, u_2, 0) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Hlavní směry

Věta

Ke každé kuželosečce existují alespoň dva na sebe kolmé hlavní směry. Jsou to vlastní vektory matice $\mathbf{A}_3$ *(z předešlého značení).*

$$\vec{u}^T\mathbf{A}\vec{v} = (u_1, u_2, 0)\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = (u_1, u_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$0 = \vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 = (u_1, u_2)\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{u}^T\lambda\mathbf{E}\vec{v}$$

Hlavní směry

Věta

Ke každé kuželosečce existují alespoň dva na sebe kolmé hlavní směry. Jsou to vlastní vektory matice $\mathbf{A}_3$ (z předešlého značení).

$$\vec{u}^T\mathbf{A}\vec{v} = (u_1, u_2, 0)\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = (u_1, u_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$0 = \vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 = (u_1, u_2)\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{u}^T\lambda\mathbf{E}\vec{v}$$

$$\vec{u}^T(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{v} = 0$$

Hlavní směry

Věta

Ke každé kuželosečce existují alespoň dva na sebe kolmé hlavní směry. Jsou to vlastní vektory matice $\mathbf{A}_3$ (z předešlého značení).

$$\vec{u}^T \mathbf{A} \vec{v} = (u_1, u_2, 0) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$0 = \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{u}^T \lambda \mathbf{E} \vec{v}$$

$$\vec{u}^T (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \vec{v} = 0$$

Je-li vlastní číslo 2-násobné - matice má nekonečně mnoho vlastních vektorů. Vybíráme dva ne sebe kolmé. (např. kružnice)
Je-li vlastní číslo 0 - pak je kuželosečka nestředová (střed je nevlastní). (např. parabola)

Osy

Definice (Osy)

Je-li U_∞ nevlastní nesingulární bod určený hlavním směrem kuželosečky c, potom poláru bodu U_∞ vzhledem k c, pokuď je to vlastní přímka, nazýváme *osou kuželosečky*.
Pozn. Je-li hlavní směr kuželosečky nevlastním singulárním bodem kuželosečky, pak definujeme jako osu kuželosečky libovolnou vlastní přímku, která je kolmá na tento směr.

Osy

Definice (Osy)

Je-li U_∞ nevlastní nesingulární bod určený hlavním směrem kuželosečky c, potom poláru bodu U_∞ vzhledem k c, pokud je to vlastní přímka, nazýváme *osou kuželosečky*.
Pozn. Je-li hlavní směr kuželosečky nevlastním singulárním bodem kuželosečky, pak definujeme jako osu kuželosečky libovolnou vlastní přímku, která je kolmá na tento směr.

Pro regulární: elipsa a hyperbola mají 2 osy, parabola má jednu osu souměrnosti.
Pro pozn.: např. 2 rovnoběžky.

Vrcholy

Definice (Vrchol)

Vlastní průsečík kuželosečky s její osou se nazývá *vrchol kuželosečky*.

Vrcholy

Definice (Vrchol)

Vlastní průsečík kuželosečky s její osou se nazývá *vrchol kuželosečky*.

Elipsa má 4 vrcholy (hlavní a vedlejší), hyperbola má 2 reálné vrcholy, parabola má 1 reálný vrchol.
Kružnice má ∞ vrcholů.

Ohniska

Definice (Ohniska)

Nechť je daný bod M na regulární kuželosečce. Pak body F_1 a F_2 nazýváme *ohniska*

- elipsy, pokuď platí $|F_1M| + |F_2M| = 2a$ a současně $|F_1F_2| < 2a$, kde a je délka hlavní poloosy.
- hyperboly, pokuď platí $||F_1M| - |F_2M|| = 2a$ a současně $|F_1F_2| > 2a$, kde a je délka hlavní poloosy.
- paraboly, pokuď platí $|F_1M| = |dM|$, kde d je řídicí přímka paraboly.

Spojnice F_1M, F_2M, resp. přímku rovnoběžnou s osou procházející bodem M u paraboly nazýváme *průvodiče bodu kuželosečky*.
Vzdálenost ohnisek od středu kuželosečky nazýváme excentricita e (výstřednost) kuželosečky.

Ohniska

Ohniska je možné dohledat např. pomocí vztahů:

- elipsa: $e^2 = a^2 - b^2$.
- hyperbola: $e^2 = a^2 + b^2$

nebo z vlastnosti, že tečna půlí úhel průvodičů.