Věta 4.4.7. Dvěma bodům Y, Z neležícím ve vrcholu \( P'_i \) kvadratky \( Q \) je přiřazena stejná polární nadrovina právě tehdy, je-li přímka YZ různoběžná s vrcholem \( P'_j \).

Je zřejmé, že polární nadrovina každého bodu obsahuje vrchol kvadratky \( Q \). Odtud vyplývá, že je-li kvadratka \( Q \) singulární, polarita neobrazí množinu \( A^s_{a_s} \) na množinu \( M \). Nechť tedy nyní je kvadratka \( Q \) regulární. Zvolme hází \( \mathbb{A} \) prostoru \( W'_{n+1} \). Je-li v této házi \( Y = (y_0, ..., y_n) \) polární nadrovina bodu \( Y \) má rovnicí

\[
\sum_{j=0}^{n} f_{ij}y_jx_j = 0
\]

nebo, což je totéž,

\[
\sum_{j=0}^{n} \left( \sum_{i=0}^{n} f_{ij}y_i \right) x_j = 0.
\]

Buď nyní \( \varrho \in M \) libovolná nadrovina. Nechť

\[
\sum_{j=0}^{n} a_jx_j = 0
\]

je její rovnice. K tomu, aby \( \varrho \) byla polární nadrovina bodu \( Y \), zřejmě stačí, aby platilo

\[
\sum_{i=0}^{n} f_{ij}y_i = a_j, \quad j = 0, ..., n.
\]

Zapišeme-li rovnosti (10) v maticovém tvaru, dostaneme

\[
(y_0, ..., y_n) F = (a_0, ..., a_n),
\]

kde \( F \) je matice bilineární formy \( f \). Máme-li nadrovinu \( \varrho \), určíme snadno bod \( Y \) z rovnice (11)

\[
(y_0, ..., y_n) = (a_0, ..., a_n) F^{-1}.
\]

Tudíž platí následující věta.

Věta 4.4.8. Je-li \( Q \) regulární kvadratka, je polarita vzhledem ke kvadratce \( Q \) vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru \( A^s_{a_s} \) na množinu \( M \) všech nadrovín tohoto prostoru.

Důkaz. Je polarita je zobrazení prosté, plyne z věty 4.4.7, že je to zobrazení na \( M \), vyplývá z rovnosti (12).

To, že v případě regulární kvadratky \( Q \) je polarita zobrazení na \( M \), jsme mohli snadno dokázat též přímo bez použití soustavy souřadnic. Právě tak obrácené větu 4.4.7 léープ dokázat ze vztahu (11).

Cvičení

1. V prostoru \( A^s_{a_s} \) je dána kvadratice rovnicí
   
   \[
   a) \quad x_0x_1 + x_0x_3 + x_1x_2 - 2x_4x_3 + x_2x_3 - 2x_3^2 = 0,
   \]
   
   \[
   b) \quad x_0^2 + 2x_1x_2 + 3x_3x_3 + 2x_4x_3 = 0.
   \]
   
   \[
   c) \quad x_0x_1 + x_0x_3 + x_1x_2 - 2x_4x_3 + x_2x_3 - 2x_3^2 = 0.
   \]
   
   Určete její vrchol \( P' \).

2. Ověřte, že bod \( A = (4, -4, -1) \) leží na kvadratce \( Q : \quad x_0^2 - 2x_0x_1 + 4x_0x_3 + + 2x_3^2 = 0 \) v prostoru \( A^s_{a_s} \) a určete rovnici tečné nadroviny kvadratce \( Q \) v bodě \( A \).

3. V rovině \( A^s_x \) napište rovnice tečen \( t_1, t_2 \) vedených z bodu \( A = (0, 1, -1) \) ke kuželosečce \( 2x_0^2 - 2x_1x_2 - x_3^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2 = 0 \). Na tečnách \( t_1, t_2 \) určete body dotyku \( T_1, T_2 \).

4. V prostoru \( A^s_{a_s} \) je dána kvadratice \( Q \) rovnicí \( v_0^2 + 2x_0x_1 - 2x_1x_3 + x_3^2 = 0 \). Určete rovnici tečených rovin \( t_1, t_2 \) kvadratce \( Q \) procházejících přímou \( PQ \), kde \( P = (-3, 1, -2, -4) \) a \( Q = (22, 0, 7, 14) \). V tečených rovinách \( t_1, t_2 \) nalezněte body dotyku \( T_1, T_2 \).

4.5 Afinní vlastnosti kvadrat

V tomto odstavci si budeme všímát souvislosti mezi teorii kuželoseček a kvadratických ploch vyloučenou v kapitole 3 v [G] a teorii kvadrat, kterou se zabýváme nyní.

Mějme tedy v reálné afinní rovině \( A_2 \) zvolenou lineární soustavou souřadnic \( Z \) danou repérem \( \langle P; u_1, u_2 \rangle \). Nechť v této lineární soustavě souřadnic je kuželo-

\[
ax^2 + 2bxy + cx^2 + 2dx + 2ey + f = 0,
\]

tj. bod \( X = (x, y) \) leží na kuželosečce k právě tehdy, je-li splněna rovnicí (1). Utváříme komplexní rozšíření \( A^s_{a_s} \) roviny \( A_2 \) a projektní rozšíření \( A^s_{a_s} \) afinní roviny \( A_2 \). V aritmetické bázi \( (1, P; u_1, u_2) \) má každý bod \( X \in A^s_{a_s} \) homogení souřadnice \( x_0, x_1, x_2 \), přičemž \( x_0 \neq 0 \). Potom jeho lineární souřadnice jsou \( x = x_1/x_0, y = x_2/x_0 \). Tudíž \( X \in k \) právě tehdy, když

\[
\frac{d(x_1/x_0)^2 + 2b(x_1/x_0)(x_2/x_0) + c(x_2/x_0)^2}{2d(x_1/x_0) + 2e(x_2/x_0) + f} = 0.
\]

Po vynásobení výsledné rovnice číslem \( x_0^2 \) dostaneme

\[
ax^2 + 2bxy + cx^2 + 2dx + 2ey + f = 0
\]

Ukázať jsem, jak z rovnice (1) můžeme dostat rovnici (2). Snadno uděláme obrácený postup. Nejvíce si uvědomíme, že má-li bod \( X \in A^s_{a_s} \) souřadnice \( x, y \) v lineární soustavě souřadnic, \( Z \), má homogení souřadnice \( 1, x, y \) v aritmetické bázi \( (1, P; u_1, u_2) \). Nechť tedy kuželosečka \( (1) \) dána v rovině \( A^s_{a_s} \) rovnicí (2), dostaneme rovnicí (1).
4.6 Metrické vlastnosti kvadríku

V tomto odstavci budeme pracovat v euklidovském prostoru $E_5$. Jeho zaměření budeme označovat $V$, a skalární součin dvou vektorů $u, v \in V$ budeme značit $u \cdot v$. Protože euklidovský prostor je vlastně zvláštní případ afinního prostoru (přesněji řečeno struktura euklidovského prostoru zahrnuje jako svou část i strukturu afinního prostoru), můžeme utvořit prostor $E_5^C$ - komplexní rozšíření euklidovského prostoru, i prostor $E_5^C$ - projektivní rozšíření prostoru $E_5^C$. Skalární součin je bilineární forma na prostoru $V$. Proto ho můžeme rozšířit i na vektorový prostor $V^C$. Pro dva vektoru $u, v \in V^C$, $u = u_1 + iu_2$, $v = v_1 + iv_2$ ($u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$) pak bude platit (viz věta 4.1.2):

$$(1) \quad u \cdot v = (u_1 + iu_2)(v_1 + iv_2) = u_1v_1 + u_2v_2 + i(u_1v_2 + u_2v_1)$$

V prostoru $E_5^C$ budeme opět zkoumat kvadríky. Budeme předpokládat, že $Q$ je kvadríka v prostoru $E_5^C$ daná rovnicí $f_2(x) = 0$. Ponecháme i další označení, která jsme zavedli v prostoru $A_5^C$. Např. nevlastní nadrovínou budeme značit $v$, $A_5^C$ bude aritmetický základ prostoru $E_5^C$ atd.

Nejdříve budeme definovat tzv. hlavní směry kvadratické formy na prostoru $V$. Jestliže budeme hledat hlavní směry kvadratické formy $f_2$ a $Q$ bude středová kuželosečka v $E_5^C$, ukážíme, že hlavní směry budou směry jejích os. U paraboly to však bude směr osy a směr vrcholové tečny. Proto také volíme nový termín – hlavní směry. Směr je přitom tak jak dříve jednorozměrný podprostor prostoru $V^C$ – nevlastní bod prostoru $E_5^C$.

**Definice 4.6.1.** Směr $U \in E_5^C$ generovaný vektorom $u \in V$, nazývámme *hlavní směr* kvadratické formy $f_2$, resp. hlavní směr kvadríky $Q$, jestli je konjugovaný s každým směrem na něj kolým.

Ukážeme si výpočet hlavních směrů kvadratické formy. K tomu, aby $U$ byl hlavní směr, je nutné a stačí, aby byla splněna pro každý vektor $x \in V^C$ podmínka

$$(2) \quad u \cdot x = 0 \Rightarrow f(u, x) = 0$$

(to plyne přímo z definice 4.6.1). Bereme-li ve vztahu (2) vektor $u$ pevně, jsou výrazy $u \cdot x$ a $f(u, x)$ lineární formy proměnného vektoru $x$. Z anulování jedné lineární formy vyplývá anulování druhé. To platí právě tehdy, je-li druhá lineární forma násobkem první lineární formy. Vektor $u$ tedy určuje hlavní směr právě tehdy, existuje-li číslo $c \in R$ tak, že

$$(3) \quad f(u, x) = cu \cdot x$$

pro každý vektor $x \in V^C$. Nyní zvolíme ortonormální bázi $\langle v_1, \ldots, v_6 \rangle$ prostoru $V$. Cvičení

Zadání všech cvičení jsou v rovině $A_5^C$ v dané lineární soustavě souřadnic.

1. Určete množinu $M$ všech středů kuželoseček
   a) $-x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$,
   b) $x^2 + 4xy + 3y^2 - 4x + 1 = 0$,
   c) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 3 = 0$.

2. Napište rovnice asymptot kuželosečky
   a) $3x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 2 = 0$,
   b) $2x^2 + xy - 3y^2 + 5y - 2 = 0$.

3. Určete druh kuželoseček ze cvičení 1 a 2.

4. Určete druh kuželosečky
   a) $x^2 + 2xy + 2y^2 - 2y + 2 = 0$,
   b) $x^2 + xy - x + 2y = 0$,
   c) $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x - 6y + 2 = 0$,
   d) $4x^2 + 4xy + 2y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$.

5. Napište rovnici kuželosečky, je-li dán:
   a) $S = \{1, 0\}$ je střed, $y = 1$ je tečna s bodem dotyku $T = [0, 1]$, $A = [0, -3]$ je bod kuželosečky.
   b) $x - y = 0$ je asymptota, osa $x$ je průměr sdružené se směrem určeným vektem $u = (1, 2)$ a body $A = [1, -1]$, $B = [-1, 2]$ jsou konjugované.
Příklad 3. Na obr. 52 je dána hyperbola sdruženými průměry $p_1, p_2$ a tečnou $t$ s bodem dotyku $R$. Určete hlavní osu hyperboly, její průsečíky s hyperbolou a asymptoty hyperboly.

![Diagram 50](image)

![Diagram 51](image)

![Diagram 52](image)

![Diagram 53](image)

Řešení. Postup sledujeme na obr. 53. Pomocí Euklidovy věty najdeme body $A_1, A'_1 \in p_1$ a $B_2, B'_2 \in p_2$ tak, aby platily vztahy (22), (23) (z důvodu přehlednosti obrázku není tato konstrukce vyobrazena). Sestrojíme rovnoběžník $KLMN$ (viz obr. 49). Jeho úhlopříčky jsou asymptoty hyperboly. Osy $o_1, o_2$ úhly, které asymptoty svirají, jsou osy hyperboly. Z polohy tečny $t$ a bodu dotyku $R$ je zřejmé, která z os $o_1, o_2$ protíná hyperbolou – je to osa $o_1$. Její průsečíky $A_1, A'_1$

s hyperbolou určíme podle vzorce (22) z bodů $R_1$ a $T_1$ (konstrukce je na obr. 53 skutečně provedena). Tim je příklad vyřešen.

Cvičení
1. Pro danou kuželosečku $\mathcal{Q}$ zjistěte, zda je regulární nebo singulární. Je-li kuželosečka $\mathcal{Q}$ singulární, určete přímky, které ji tvoří. Jestliže kuželosečka $\mathcal{Q}$ je regulární, určete její střed $S$ (je-li $\mathcal{Q}$ středová kuželosečka), resp. vrchol $V$ (je-li $\mathcal{Q}$ parabola), vektory $u_1, u_2$ tvořící ortornormální bázi a určující hlavní směry a napíšte rovnici kuželosečky $\mathcal{Q}$ v kartézské soustavě souřadnic $\mathcal{Q}$ určené repěrem $\langle S, u_1, u_2 \rangle$, resp. $\langle V, u_1, u_2 \rangle$. Kuželosečka $\mathcal{Q}$ je přímá dána následující rovnici
   
   a) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 2x + 4y + 3 = 0,$
   b) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + x + 7y - 3 = 0,$
   c) $-3x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x - 1 = 0,$
   d) $4x^2 + 4xy + 2y^2 + 4x - 2y + 5 = 0,$
   e) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 6x - 12y + 9 = 0,$
   f) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0,$
   g) $5x^2 + 12xy + 10y^2 - 4y + 2 = 0,$
   h) $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 5 = 0.$

2. Napíšte rovnici kuželosečky, je-li v dané kartézské soustavě souřadnic dáno:
   a) $x + y = 2 = 0$ je osa, $u = (1, 0)$ určuje směr asymptoty, $x = 1$ je tečna s bodem dotyku $T = [1, 0]$.
   b) $x + 2y = 0$ je osa, kuželosečka je parabola a souřadnicová osa $x$ je tečna s bodem dotyku $T = [1, 0]$.

4.7 Svažky kvadrat

4.2 Kvadratické formy

1. a) \[
\begin{pmatrix}
1, & -5/2, & 2 \\
-5/2, & 1, & -1 \\
2, & -1, & -3
\end{pmatrix}
\]
   b) \[
\begin{pmatrix}
0, & 1/2, & 0 \\
1/2, & 0, & -1/2 \\
0, & -1/2, & 0
\end{pmatrix}
\]

2. a) \(f(x, y) = -5x_1^2 - 10x_1x_2 + 5x_2^2x_3 - 5x_2x_3^2 + 2x_1^2\),
   b) \(f(x, y) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2\).

3. a) \(u_1' = u_1, u_2' = -2u_1 + u_3, u_3' = 19u_1 + 14u_2 + 8u_3\) (u_3' dán až na nenulový násobek)
   
   \(f_2(x) = x_1^2 - 7x_2^2 - 532x_3^2\),
   b) \(u_1' = u_1 + u_2, u_2' = u_2 + u_3, u_3' = u_1 + u_3\) (u_3' dán až na nulový násobek)
   
   \(f_2(x) = x_1^2 - x_2^2\).

4.4 Polární vlastnosti kvadratik

1. a) \(P' = \overline{OQ'}\), kde např. \(P = (1, 0, -1, 0), Q = (2, -1, 0, 1),\) b) \(P' = \emptyset\), c) \(P' = \{R\}\),
   kde \(R = (1, 0, 0, -1)\).

2. \(x_0 + 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0\)

3. \(t_1: x_0 - x_1 - x_2 = 0, t_2: x_0 + x_1 + x_2 = 0, T_1 = (2, 1, 1), T_2 = (2, -3, 1)\)

4. \(t_1: -9x_0 + x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0, t_2: -5x_0 + 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0,
   T_1 = (1, -4, 2, 1), T_2 = (3, -1, 3, 1)\)

4.5 Afínní vlastnosti kvadratík

1. a) \(M = \{S\}\), \(S = [-5/4, -1/4]\); b) \(M = \emptyset\); c) \(M\) je přímka \(x + 2y = 2 = 0\)

2. a) \(x - y - 1 = 0, 3x - y + 1 = 0, b) x - y + 1 = 0, 2x + 3y - 2 = 0\)

3. 1a) hyperbola, 1b) parabola, 1c) dvě rovnoběžné, 2a) hyperbola, 2b) dvě různoběžné

4. a) imaginární elipsa, b) elipsa, c) imaginární rovnoběžky, d) imaginární různoběžky

5. a) \(x^2 + 2xy - y^2 - 2x - 2y + 3 = 0\), b) \(2x^2 - 2xy + 5 = 0\)

4.6 Metrické vlastnosti kvadratík

1. a) \(\mathcal{Q}\) je elipsa, \(S = [3/2, -1], u_1 = (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}), u_2 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}),
   \mathcal{Q}: 2x^2 + 12y^2 = 1\)

b) \(\mathcal{Q}\) je singulární, tvoří ji přímky \(x + 2y - 1 = 0\) a \(2x - y + 3 = 0\)

c) \(\mathcal{Q}\) je hyperbola, \(S = [-5/12, 1/4], u_1 = (1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10}), u_2 = (3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10}),
   \mathcal{Q}: 36x^2 - 24y^2 = 1\)

d) \(\mathcal{Q}\) je singulární, tvoří ji přímky \(2x + (1 + i)y + 1 - 2i = 0, 2x + (1 - i)y + 1 + 2i = 0\)

e) \(\mathcal{Q}\) je singulární, tvoří ji přímka \(x - 2y + 3 = 0\)

f) \(\mathcal{Q}\) je parabola, \(V = [-7/12, 1/12], u_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), u_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}),
   \mathcal{Q}: y' = (\sqrt{2}/3) x'^2\)

g) \(\mathcal{Q}\) je imaginární elipsa, \(S = [-6/7, -5/7], u_1 = (3/\sqrt{13}, -2/\sqrt{13}), u_2 = (2/\sqrt{13}, 3/\sqrt{13}), \mathcal{Q}: x'^2 + 14y'^2 + 4/7 = 0\)

h) \(\mathcal{Q}\) je singulární, tvoří ji přímky \(x + y + 2 = 0\) a \(x + y + 2 + i = 0\)

2. a) \(xy + 3x - y - 3 = 0\), b) \(x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x + y + 1 = 0\)