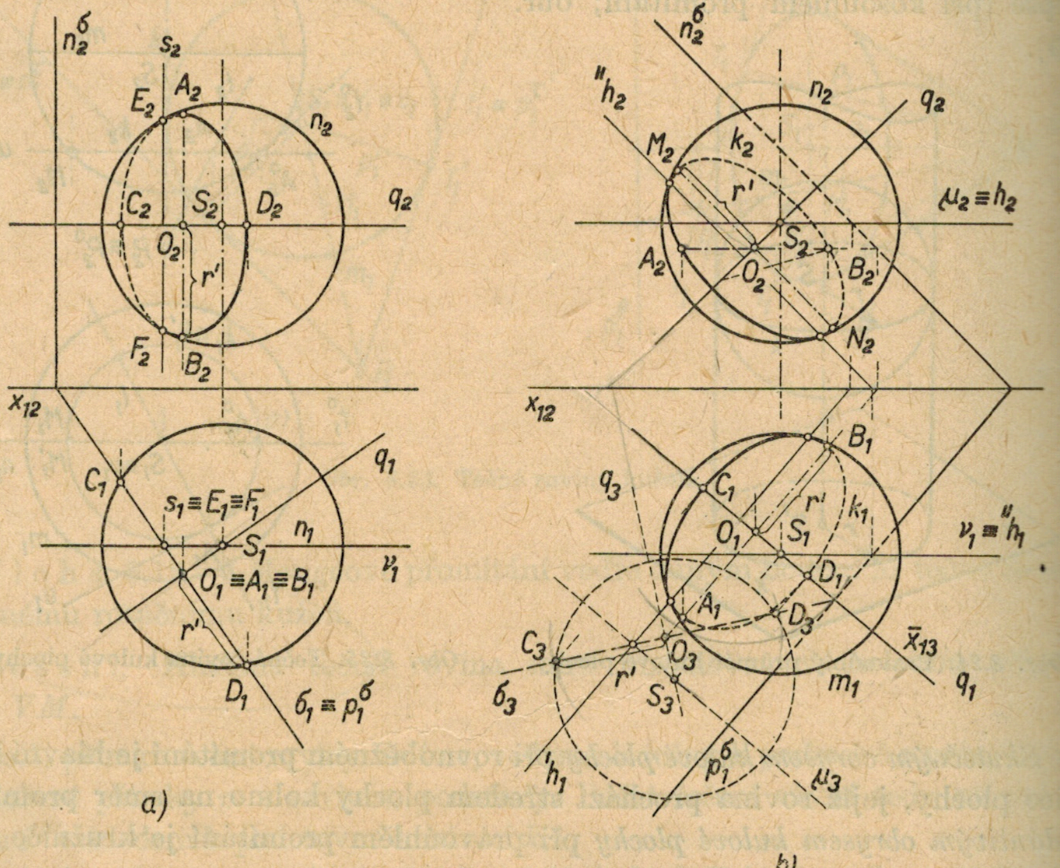
Úloha 8.13. V Mongeově promítání zobrazte kulovou plochu o daném středu S a poloměru r. Zobrazte její bod A (je dán A_1) a určete v něm tečnou rovinu plochy.

Řešení (obr. 8.25). Sdruženými obrazy kulové plochy jsou dva kruhy poloměru r se středy v S_1 a S_2.

Prvým zdánlivým obrysem plochy je kružnice m_1, která je prvým obrazem hlavní kružnice m rovnoběžné s prvou průmětnou; její druhý obraz m_2 prochází bodem S_2. Podobně hlavní kružnice n rovnoběžná s druhou průmětnou má za svůj prvý obraz úsečku n_1; její druhý obraz n_2 je druhým zdánlivým obrysem kulové plochy.

Zbývající obraz A_2 bodu A kulové plochy sestrojíme užitím kružnice k ležící na ploše, která jím prochází a je např. rovnoběžná s prvou průmětnou. Její prvý obraz je kružnice k_1 o středu S_1 a poloměru S_1A_1. Druhý obraz je úsečka k_2, kterou určíme pomocí společného bodu M kružnice k a n; A_2 leží pak na k_2. Leží-li A_1 uvnitř kružnice m_1, úloha je dvojznačná.

Tečná rovina v bodě A kulové plochy je určena dvěma různými tečnami plochy v bodě A. Sestrojíme je jako tečny kružnic plochy, které procházejí bodem A. Tečnou rovinu určíme tedy např. tečnou u ke kružnici k a tečnou t k hlavní kružnici l plochy. Kružnice l prochází bodem A a leží v prvé promítací rovině. Tečnu t zobrazíme bez rýsování druhého obrazu kružnice l.



Obr. 8.26. Řez kulové plochy.

Rovinu kružnice l otočíme kolem prvé promítací přímky o středu S do polohy l^0 rovnoběžné s druhou průmětnou; $l^0 \equiv n$. Bod A se přitom otočí do bodu A^0; v něm sestrojíme tečnu t^0 k l^0 a otočíme zpět. Při otáčení je průsečík $P^0 \equiv t^0 . o$ samodružný; $t_2 \equiv A_2P_2$.

Místo tečny t kružnice l mohli jsme ovšem užít např. také tečny kružnice plochy, která prochází bodem A a leží v rovině rovnoběžné s druhou průmětnou.

Ú l o h a 8.14. Sestrojte sdružené obrazy řezu dané kulové plochy, určené středem S a poloměrem r, danou rovinou σ.

Ř e š e n í. Najdeme střed O a poloměr r' průsečné kružnice k. Střed O určíme jako patu kolmice q spuštěné ze středu S kulové plochy na danou rovinu σ.

Za předpokladu, že rovina řezu je promítací (obr. 8.26a), můžeme poloměr r' stanovit přímo z toho průmětu, ve kterém řez se jeví jako úsečka. Řez zobrazíme jako kružnici, pro kterou známe rovinu, střed a poloměr.

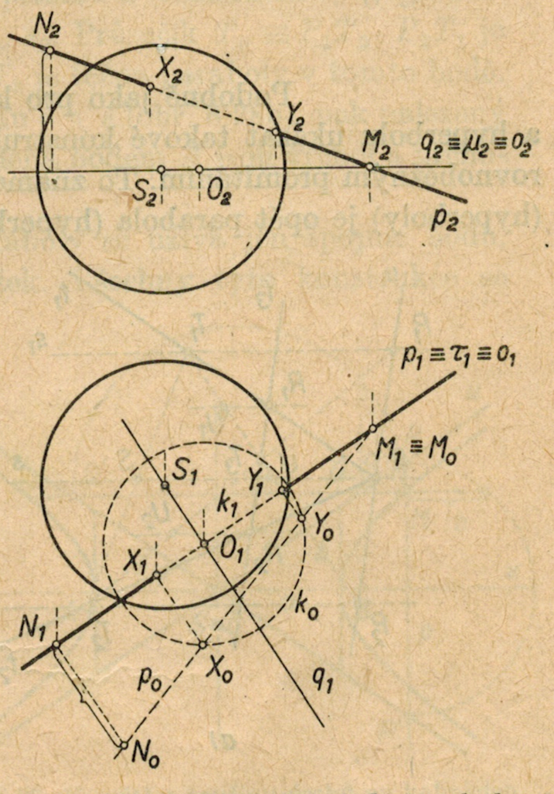
Na obr. 8.26a jsou nalezeny i body E_2, F_2, v nichž druhý obraz k_2 se dotýká druhého zdánlivého obrysu n_2 kulové plochy. Rovina ν skutečného druhého obrysu n plochy protíná rovinu řezu σ v přímce s. Společné body E, F přímky s a kružnice n jsou body řezu; jejich druhé obrazy, tj. průsečíky s_2 s n_2, jsou hledané body dotyku.

Jestliže rovina řezu je kosá k oběma průmětnám (obr. 8.26b), můžeme r' stanovit buď přímo pomocí pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsnami jsou skutečná velikost SO a poloměr r', a přeponou r, nebo užitím třetí průmětny.

Třetí pomocnou průmětnu zvolíme kolmou k rovině σ a např. k prvé průmětně; $\bar{x}_{13} \perp p_1^\sigma$. Třetí obraz σ_3 roviny řezu vytíná ve třetím obraze kulové plochy úsečku, která je třetím obrazem řezu, a tedy určuje r'.

Řez k opět zobrazíme jako kružnici v dané rovině, pro kterou známe střed a poloměr.

Sestrojíme ještě body, v nichž se obrazy řezu dotýkají prvého a druhého zdánlivého obrysu kulové plochy. Rovina μ prvého skutečného obrysu m plochy protíná rovinu σ v prvé hlavní přímce ${}^{\mathrm{I}}h$; průsečíky ${}^{\mathrm{I}}h_1$ s m_1 jsou body dotyku k_1 a m_1. Podobně rovina ν druhého skutečného obrysu n protíná ro-



Obr. 8.27. Průsečík přímky s kulovou plochou.

vinu řezu σ v druhé hlavní přímce ${}^{II}h$; k_2 se dotýká n_2 v jejích průsečících s ${}^{II}h_2$.

Nakonec určíme viditelnost obou obrazů řezu.

Úloha 8.15. V Mongeově promítání sestrojte průsečíky dané přímky p s kulovou plochou určenou středem S a poloměrem r.

Řešení (obr. 8.27). Přímkou p proložíme prvou promítací rovinu τ, která protíná kulovou plochu v kružnici k. Společné body přímky p a kružnice k jsou body, v nichž přímka p protíná kulovou plochu.

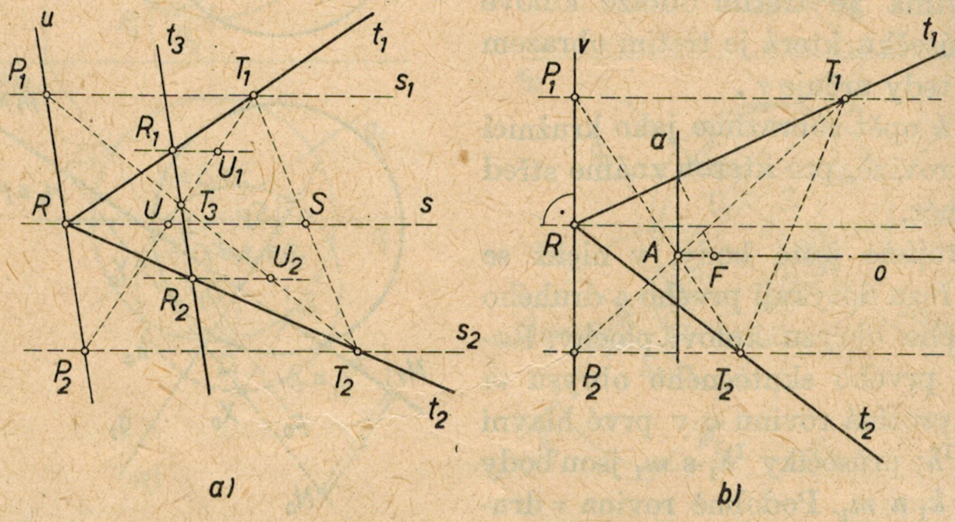
Prvý obraz k_1 kružnice k je úsečka společná prvému obrazu kulové plochy a přímce p_1. Druhý obraz kružnice k není třeba rýsovat; najdeme jen známým způsobem její střed O a poloměr r'.

Prvou promítací rovinu přímky p sklopíme pak do roviny μ, která prochází středem S a je rovnoběžná s prvou průmětnou. Osa otáčení je tedy přímka $o \equiv \tau \,.\, \mu$. Sklopená poloha středu O je $O_0 \equiv O_1$, takže sklopená poloha kružnice k je $k_0 \equiv (O_0, r')$. Přímku p sklopíme tak, že sklopíme její dva různé body $M \equiv p \,.\, \mu$ a N; $p_0 \equiv M_0N_0$. Společné body X_0, Y_0 přímky p_0 a kružnice k_0 otočíme zpět. Tím stanovíme X_1, Y_1, na ordinálách najdeme X_2, Y_2.

Oba obrazy obou průsečíků jsou viditelné.

8.5. ROVNOBĚŽNÝ PRŮMĚT PARABOLY A HYPERBOLY

Podobně jako pro kružnici a elipsu je možno i pro parabolu a hyperbolu ukázat takové konstrukce, které se nemění afinitou, a tedy ani rovnoběžným promítáním. To znamená, že rovnoběžným průmětem paraboly (hyperboly) je opět parabola (hyperbola).



Obr. 8.28. Konstrukce paraboly určené dvěma tečnami s dotykovými body.