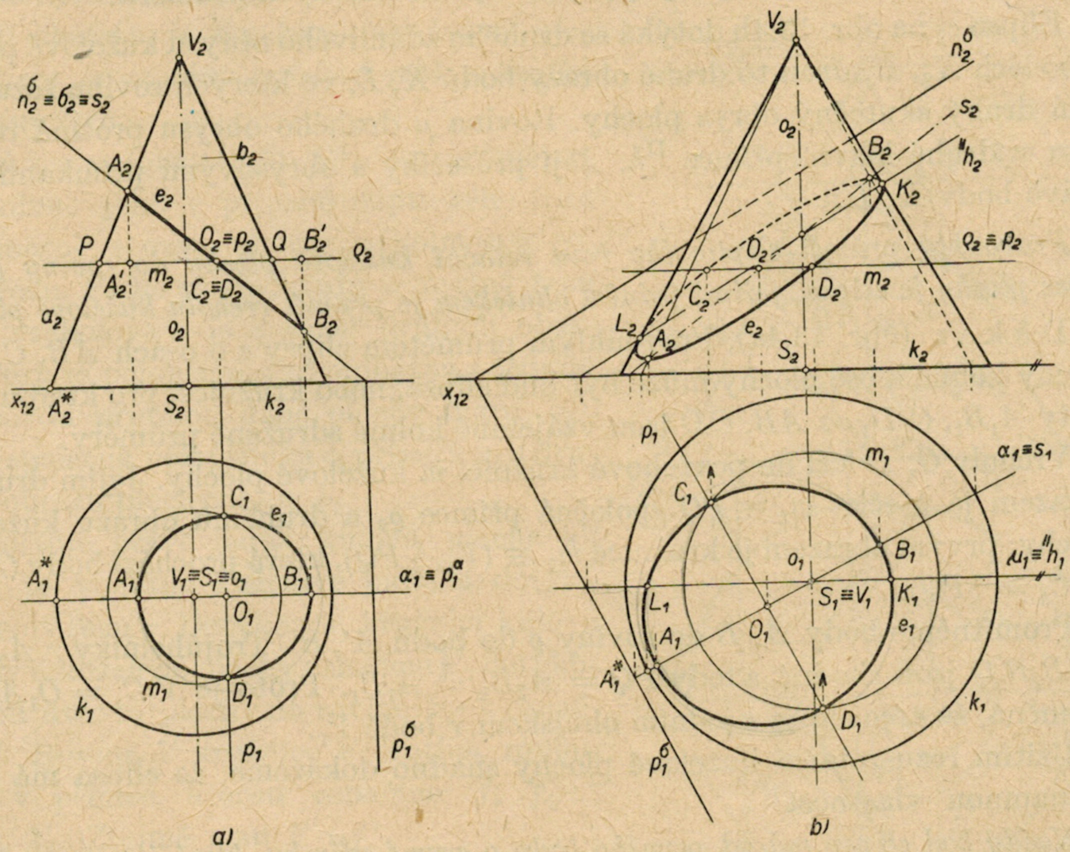
$= AB$. To značí, že každý bod řezu je bodem elipsy e, jejíž ohniska jsou body F', F'' a hlavní osa je AB. Snadno se uváží, že obráceně každý bod elipsy e je také bodem řezu. Tím je věta dokázána.

Při konstrukci řezu nikdy nesestrojujeme vepsané kulové plochy, jichž jsme užili při důkazu věty. Najdeme přímo osy AB, CD elipsy e, resp. jejich obrazy. Hlavní osa leží na průsečnici s roviny řezu σ a roviny α, která prochází osou kuželové plochy a je kolmá k rovině řezu. Hlavní vrcholy A, B jsou průsečíky



Obr. 13.4. Konstrukce eliptického řezu rotační kuželové plochy.

přímky s s kuželovou plochou. Místo ohnisek určíme přímo vedlejší vrcholy C, D.

Úloha 13.2. V Mongeově promítání zobrazte eliptický řez rotačního kužele, jehož podstava leží v prvé průmětně $^1\pi$.

Řešení. Na obr. 13.4a, b rovina σ je volena tak, aby řez byl eliptický; stopa $p^{\sigma'}$ vrcholové roviny $\sigma' \parallel \sigma$ totiž neprotíná podstavnou kružnici k plochy.

Rovina α, která je proložena osou o plochy a je kolmá k rovině řezu ($\alpha_1 \perp p_1^\sigma$), protíná kuželovou plochu příslušnou danému kuželi v povrchových přímkách a, b a rovinu řezu σ v přímce s. Průsečíky $A \equiv a \,.\, s$, $B \equiv b \,.\, s$ jsou hlavní vrcholy řezu.

Pomocná rovina ϱ, která prochází středem O úsečky AB kolmo k ose o

Místo otáčení spádové přímky je použita vrcholová rovina alfa plochy, protíná plášť kužele v kružnici m a rovinu řezu v přímce p. Společné body C, D kružnice m a přímky p jsou vedlejší vrcholy řezu.

Rovina σ není prvou promítací rovinou, a proto prvým průmětem elipsy e je elipsa e_1. Osy AB, CD elipsy e promítají se do sdružených průměrů A_1B_1, C_1D_1, které jsou vzájemně kolmé (AB je prvá spádová přímka roviny a CD prvá hlavní přímka), a tedy jsou osami elipsy e_1. Druhý obraz elipsy e na obr. 13.4a je úsečka A_2B_2 (rovina σ je druhou promítací rovinou), na obr. 13.4b elipsa e_2, pro kterou A_2B_2, C_2D_2 jsou dvojicí sdružených průměrů.

Elipsa e_2 na obr. 13.4b dotýká se druhého zdánlivého obrysu kuželové plochy v bodech K_2, L_2. Jsou to druhé obrazy bodů K, L, ve kterých rovina řezu protíná druhý skutečný obrys plochy. Rovina μ druhého obrysu protíná rovinu řezu v druhé hlavní přímce ${}^{II}h$. Její průsečíky s obrysovými přímkami jsou právě body K, L.

Pravoúhlý průmět eliptického řezu rotační kuželové plochy do roviny kolmé k ose plochy je elipsa, jejímž jedním ohniskem je průmět vrcholu kuželové plochy.

D ů k a z (obr. 13.4a). Pravoúhlým průmětem elipsy e o osách AB, CD do roviny kolmé k ose plochy může být buď elipsa, nebo kružnice, pro kterou průměty A_1B_1, C_1D_1 os AB, CD jsou vzájemně kolmé sdružené průměry.

Vrcholy C, D leží na povrchové kružnici m kuželové plochy. Jejím druhým obrazem je úsečka $m_2 \equiv PQ$ společná přímce ϱ_2 a druhému obrazu kuželové plochy; prvým obrazem je kružnice $m_1 \equiv (V_1, \frac{1}{2}PQ)$, která prochází body C_1, D_1 ($V_1C_1 = \frac{1}{2}PQ$).

Promítněme body A, B do roviny ϱ do bodů A', B'. Trojúhelníky $\triangle A_2A_2'P$ a $\triangle B_2B_2'Q$ jsou shodné, a tedy $PQ = A_2'B_2' = A_1B_1$. Proto je $V_1C_1 = O_1A_1$; to znamená, že e_1 je elipsa s jedním ohniskem v bodě V_1.

Užitím řezu rotační kuželové plochy snadno dokážeme, že elipsa má tuto významnou vlastnost:

Každý bod elipsy má od pevného bodu a pevné přímky, která jím neprochází, stálý poměr vzdáleností menší než jedna.

D ů k a z (obr. 13.3). Roviny proložené body B, P kolmo k ose kuželové plochy protínají povrchovou přímku a v bodech, které označíme B^0, Q. Především je zřejmé, že QA' udává skutečnou velikost úsečky PP'. Dále snadno najdeme, že $AB^0 = 2e$; je totiž $AB^0 = A'A'' - B^0A' - AA'' = A'A'' - BB' - AF'' = AB - BF' - AF'' = F'F''$.

Sestrojme nyní průsečnici f' rovin λ' a σ. Pro poměr vzdáleností v_1, v_2 bodu P od bodu F' a přímky f' dostaneme postupně $v_1 : v_2 = PF' : P_2f_2' = PP' : P_2f_2' = QA' : P_2f_2' = AB^0 : AB = e : a = \varepsilon < 1$. Tím je věta dokázána. K témuž výsledku bychom došli, kdybychom užili druhého ohniska F'' a přímky $f'' \equiv \lambda'' \cdot \sigma$.

Číslo ε se nazývá *číselná výstřednost elipsy*, přímka f' (f'') *řídicí přímka* elipsy příslušná ohnisku F' (F'').

Podrobněji na hodině, včetně roviny v obecné poloze

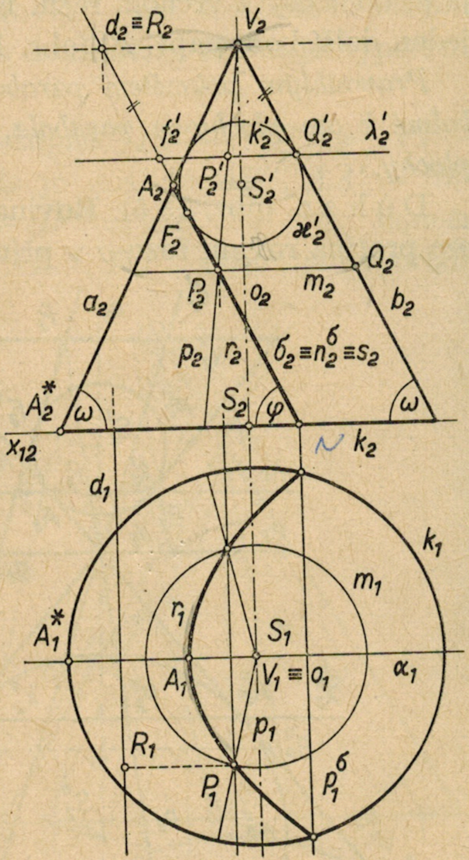
Dá se dokázat, že nalezená vlastnost je charakteristickou vlastností elipsy; platí totiž věta:

Množina všech bodů roviny, které mají od jejího daného bodu a dané přímky (která neprochází daným bodem) stálý poměr vzdáleností menší než jedna, je elipsa.

Parabolický řez rotační kuželové plochy ($\varphi = \omega$). *Rotační kuželová plocha je proťata rovinou — která není vrcholová, a která s rovinou povrchové kružnice svírá stejný úhel jako povrchové přímky plochy — v parabole. Její ohnisko je dotykový bod kulové plochy, která je vepsána kuželové ploše a dotýká se roviny řezu.*

Důkaz (obr. 13.5). Druhou průmětnu ${}^2\pi$ zvolíme jako v případě eliptického řezu rovnoběžně s osou plochy a kolmou k rovině řezu. Podle předpokladu o rovině řezu (není vrcholová a je $\varphi = \omega$) druhým obrazem řezu je polopřímka rovnoběžná s jednou obrysovou přímkou dané plochy (např. b_2). Je to společná polopřímka r_2 přímky σ_2 a druhého obrazu plochy; $r_2 \nparallel b_2$.

Existuje právě jedna kulová plocha $\varkappa'$, která je vepsána kuželové ploše a dotýká se roviny řezu σ. Dotykovou kružnici kulové plochy a kuželové plochy označme k', dotykový bod kulové plochy na rovině řezu označme F'. Rovina λ' kružnice k' protíná rovinu řezu v přímce, kterou označíme f; $f_2' \equiv \equiv \sigma_2 \,.\, \lambda_2'$. Zřejmě není $F' \in f'$.



Obr. 13.5. Parabolický řez rotační kuželové plochy.

Dokážeme, že řezem je parabola, která má ohnisko F' a řídicí přímku f'. Povrchová přímka p plochy vedená libovolným bodem P řezu dotýká se kulové plochy $\varkappa'$ v bodě P' kružnice k'. Tečny PP' a PF' vedené z bodu P ke kulové ploše $\varkappa'$ jsou stejně veliké; $PP' = PF'$. Skutečnou velikost úsečky PP' najdeme, otočíme-li přímku p kolem osy např. do přímky b. Jsou-li Q, Q' otočené polohy bodů P,. P', je $PP' = QQ' = Q_2Q_2'$. Z rovnoběžníka $P_2Q_2Q_2'f_2'$ dále najdeme $Q_2Q_2' = F_2'f_2'$. Ale $F_2'f_2'$ rovná se skutečné velikosti vzdálenosti bodu F' od přímky f'. Vzhledem k předchozím rovnostem našli jsme tedy, že P je bodem paraboly s řídicí přímkou f' a ohniskem F'. Obráceně lze dokázat, že každý bod této paraboly je bodem řezu.

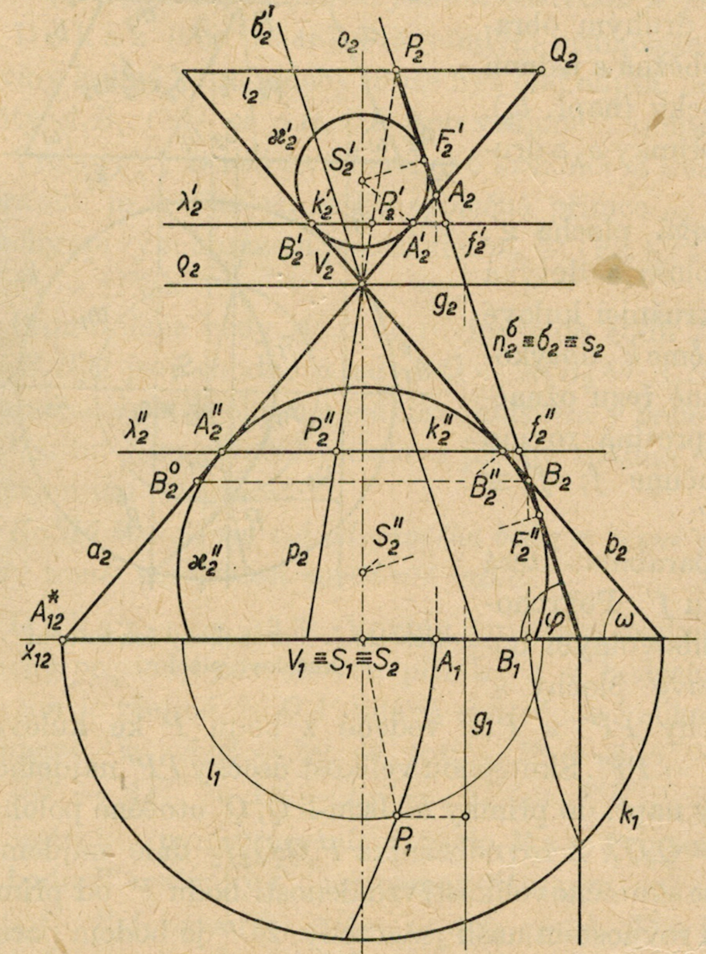
Osa průsečné paraboly je zřejmě rovnoběžná s přímkou b, tj. s tou povrchovou přímkou plochy, s níž je rovnoběžná rovina řezu. Vrchol A paraboly je průsečík povrchové přímky a s rovinou řezu. Vrchol A tedy sestrojíme takto: Osou plochy proložíme rovinu α kolmou k rovině řezu. Rovina α protíná rovinu řezu v přímce s a kuželovou plochu ve dvou povrchových přímkách. S jednou z nich je přímka s rovnoběžná a druhou protíná ve vrcholu řezu.

Jak víme, rovnoběžným průmětem paraboly je parabola (není-li směr promítání rovnoběžný s rovinou paraboly), a tedy pravoúhlým průmětem parabolického řezu r rotační kuželové plochy na rovinu kolmou k její ose je parabola. Ze souměrnosti řezu vzhledem k rovině α plyne, že osa a vrchol tohoto průmětu je průmět osy a vrcholu řezu. Ke konstrukci průmětu r_1 stačí tedy určit ještě jeden další bod, např. P_1 (obr. 13.5). Můžeme však rovněž užít věty:

Pravoúhlým průmětem parabolického řezu rotační kuželové plochy do roviny kolmé k ose plochy je parabola, jejímž ohniskem je pravoúhlý průmět vrcholu plochy.

D ů k a z (obr. 13.5). Rovina ϱ proložená vrcholem V plochy kolmo k její ose protíná rovinu řezu σ v přímce, kterou označíme d. V rovině σ sestrojíme patu R kolmice spuštěné z bodu P na přímku d; $P_1R_1 \perp d_1$. Úsečky PV a PR jsou stejně veliké (neboť svírají týž úhel φ s prvou průmětnou $^1\pi$ a body V, R leží v $\varrho \parallel {^1\pi}$), a tedy i jejich průměty P_1V_1, P_1R_1 jsou stejně veliké ($P_1V_1 = PV \cos \varphi = PR \cos \omega = P_1R_1$). Bod P_1 je proto bodem paraboly r_1, která má ohnisko V_1 a řídicí přímku d_1; obráceně každý bod této paraboly je zřejmě možno pokládat za prvý obraz nějakého bodu paraboly r.

Z předchozí části plyne, že pravoúhlý průmět parabolického řezu rotační kuželové plochy do roviny kolmé k ose plochy můžeme vždy určit ohniskem a vrcholem.



Obr. 13.6. Hyperbolický řez rotační kuželové plochy.

H y p e r b o l i c k ý ř e z r o t a č n í k u ž e l o v é p l o c h y ($\omega < \varphi \leqq \frac{1}{2}\pi$). *Rotační kuželová plocha je proťata rovinou — která není vrcholová a která s ro-*

v inou povrchové kružnice plochy svírá větší úhel než povrchové přímky — v hyperbole. Její ohniska jsou dotykové body kulových ploch, které jsou vepsány kuželové ploše a dotýkají se roviny řezu.

D ů k a z (obr. 13.6). Druhou průmětnu volíme rovnoběžnou s osou plochy a kolmou k rovině řezu. Z předpokladů o rovině řezu (není vrcholová a je $\omega < \varphi \leqq \frac{1}{2}\pi$) plyne, že druhým obrazem řezu jsou dvě polopřímky na přímce σ_2 bez společného bodu (které jsou společné přímce σ_2 a druhému obrazu plochy).

Podobně jako v případě eliptického řezu existují právě dvě kulové plochy $\varkappa'$, $\varkappa''$ vepsané kuželové ploše a dotýkající se roviny řezu. Zvolíme-li označení stejné jako v případě eliptického řezu, máme dokázat, že řezem je hyperbola, která má ohniska F', F'' a hlavní osu AB.

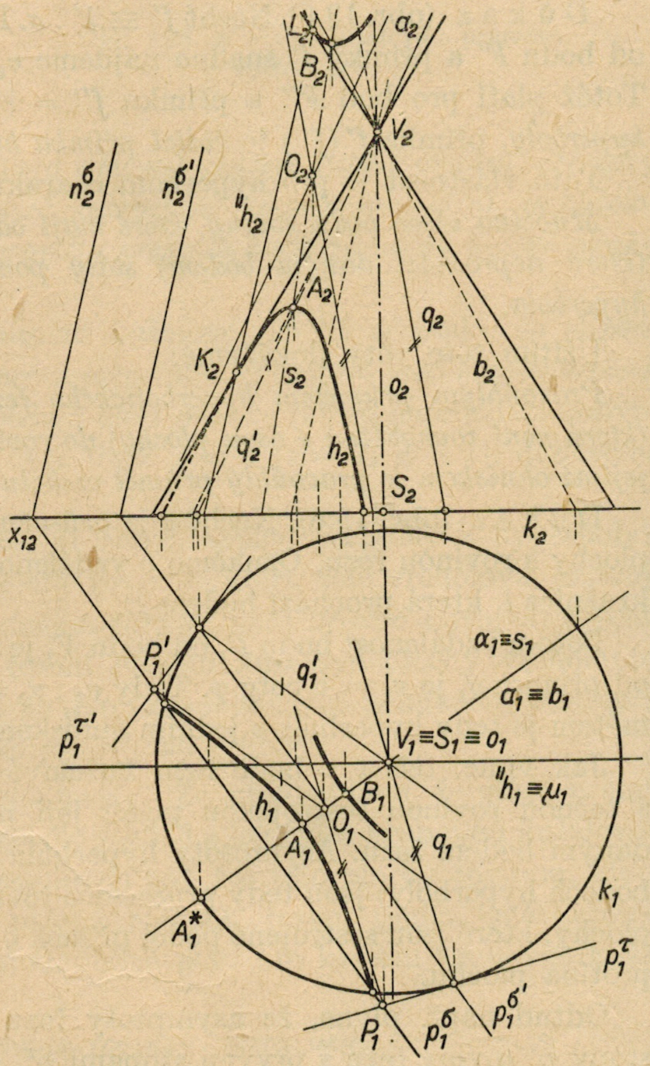
Pro libovolný bod P řezu najdeme postupně $|PF' - PF''| = |PP' - PP''| = P'P'' = A'A'' = B'B''$. Protože je $AA'' = AF''$, $AA' = BF''$, dostaneme $A'A'' = AA'' - AA' = AF'' - BF'' = AB$. Je tedy konečně $|PF' - PF''| = AB$; vzhledem k tomu, že $AB < F'F''$, řezem je hyperbola.

Snadno se uváží, že $AB^0 = 2e$. Dále je zřejmé, že asymptoty řezu jsou rovnoběžné s povrchovými přímkami plochy, v nichž vrcholová rovina $\sigma' \parallel \sigma$ protíná plochu.

Při konstrukci hyperbolického řezu sestrojujeme vrcholy A, B a asymptoty řezu. Hlavní osa hyperboly je průsečnice $s \equiv \sigma \,.\, \alpha$, kde α je rovina, která prochází osou plochy kolmo k rovině řezu; vrcholy A, B jsou průsečíky přímky s s plochou.

Ú l o h a 13.3. V Mongeově promítání zobrazte hyperbolický řez rotačního kužele, jehož podstava leží v prvé průmětně ${}^1\pi$.

Ř e š e n í (obr. 13.7). Vrcholová rovina σ' rovnoběžná s danou rovinou řezu σ protíná kuželovou plochu ve dvou povrchových přímkách q, q', které jsou rovnoběžné s asymptotami prů-



Obr. 13.7. Konstrukce hyperbolického řezu rotační kuželové plochy.

Stejně jako u eliptického řezu

sečné hyperboly h. Rovina $\alpha \perp \sigma$, procházející osou plochy, protíná plochu v přímkách a, b; průsečíky $A \equiv s\,.\,a$, $B \equiv s\,.\,b$ jsou vrcholy řezu. Střed O úsečky AB je střed hyperboly h.

Rovina σ není prvou ani druhou promítací rovinou, a proto oba průměty řezu jsou hyperboly, jejichž asymptoty jsou průměty asymptot řezu.

Vzhledem k tomu, že řez je souměrný podle roviny $\alpha \perp {}^1\pi$, jsou body A_1, B_1 vrcholy prvého průmětu h_1; asymptoty procházejí středem O_1 úsečky A_1B_1 a jsou rovnoběžné s přímkami q_1, q_1'.

Pro druhý obraz h_2 známe střed O_2, asymptoty (které procházejí bodem O_2 rovnoběžně s přímkami q_2, q_2') a např. bod A_2. Můžeme tedy známým způsobem sestrojit osy a vrcholy hyperboly h_2. Stejně jako při eliptickém řezu najdeme ještě body K_2, L_2, v nichž se h_2 dotýká druhého obrysu plochy.

Místo kuželové plochy je ovšem dán kužel. Daná rovina protíná jeho plášť jen v úseči jedné větve hyperboly h.

Každý vlastní bod hyperboly má od pevného bodu a pevné přímky, která jím neprochází, stálý poměr vzdáleností větší než jedna.

D ů k a z (obr. 13.6). Nechť $f' \equiv \lambda'\,.\,\sigma$. Pro poměr vzdáleností v_1, v_2 bodu P od bodu F' a přímky f' snadno najdeme $v_1 : v_2 = AB^0 : AB = e : a = \varepsilon > 1$. Totéž platí pro bod F'' a přímku $f'' = \lambda''\,.\,\sigma$. Číslo ε je *číselná výstřednost hyperboly*, přímka f' (f'') je *řídicí přímka hyperboly* příslušná ohnisku F' (F'').

Tato vlastnost je pro hyperbolu charakteristická; je totiž možno dokázat:

Množina všech bodů roviny, které mají od jejího daného bodu a dané přímky (která neprochází daným bodem) stálý poměr vzdáleností větší než jedna, je hyperbola.

Užitím této věty dokážeme:

Pravoúhlým průmětem hyperbolického řezu rotační kuželové plochy rovinou (která není rovnoběžná s osou plochy) do roviny kolmé k ose plochy je hyperbola, jejímž ohniskem je pravoúhlý průmět vrcholu plochy.

D ů k a z (obr. 13.6). Nechť g je průsečnice vrcholové roviny ϱ kolmé k ose plochy s rovinou řezu. Označme v vzdálenost vrcholu V od roviny povrchové kružnice l, která prochází bodem P.

Potom vzdálenost bodu P_1 od bodu V_1 je $v_1 = v$ cotg ω a vzdálenost bodu P_1 od přímky g_1 je $v_2 = v$ cotg φ. Tedy $v_1 : v_2 =$ cotg φ : cotg $\omega > 1$. Prvým průmětem je tedy hyperbola s jedním ohniskem ve V_1, jak jsme měli ukázat.

Jak víme, tečna v bodě řezu kuželové plochy je průsečnice roviny řezu s tečnou rovinou sestrojenou podél její povrchové přímky, která prochází daným bodem řezu. Asymptoty hyperbolického řezu (tj. tečny v nevlastních bodech hyperboly) jsou tedy průsečnice roviny řezu σ s tečnými rovinami τ, τ' plochy, které jsou sestrojené podél přímek q, q', v nichž vrcholová rovina $\sigma' \parallel \sigma$ protíná plochu.

Odtud např. plyne, že asymptoty řezu procházejí průsečíky P, P' prvé stopy p^σ roviny řezu s prvými stopami p^τ, $p^{\tau'}$ tečných rovin τ, τ' (obr. 13.7).