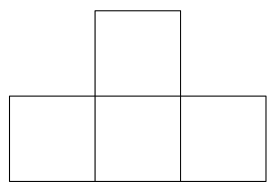
Metody dokazování - 5. sada

$\exists \nexists !$

1. $\heartsuit$, že neexistuje žádné $n \in \mathbb{N}$, pro které platí $(n+1)! + (n+2)! > n! + (n+3)!$.
2. $\heartsuit$, že neexistuje žádná dvojice $[x, y] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, pro kterou by platilo
   a) $2x^2 - 5y^2 = 7$,
   b) $2x^4 + y^4 = 7$.
3. $\heartsuit$, že neexistuje žádné $n \in \mathbb{N}$, pro které platí $2^{2n+2} + 3 \cdot 2^{n+3} + 40 = 8^{n+1}$
4. Uvažujme skupinu lidí, kteří si při přípitku ťuknou skleničkou, přitom si žádná dvojice neťukne spolu dvakrát a ne všichni si musí ťuknout se všemi. $\heartsuit$, že ve skupině deseti lidí není možné aby si jednotliví lidé ťukli
   a) $1\times, 1\times, 3\times, 3\times, 3\times, 3\times, 5\times, 6\times, 8\times, 9\times$,
   b) $3\times, 3\times, 3\times, 3\times, 5\times, 5\times, 5\times, 6\times, 6\times, 6\times$.
5. $\heartsuit$, že součet jekéhokoliv počtu $k > 1$ za sebou následujících přirozených čísel se nerovná žádné mocnině čísla 2.
6. Z klasické šachovnice 8×8 odstraníme 2 protilehlá rohová políčka. Je možné zbylý útvar pokrýt obdélníky 1×2?
7. $\heartsuit$, že pole šachovnice 8×8 není možné projít jezdcem tak, že začneme v levém dolnám a skončíme v pravém horním rohu a přitom na každé políčko skočíme právě jednou.
8. $\heartsuit$, že šachovnici 10×10 nelze pokrýt 25 obrazci, z nichž každý je sjednocením čtyř políček šachovnice a má tvar znázorněný na obrázku.



9. Ukažte, že existuje prvočíslo p takové, že $p + 4$ a $p + 6$ jsou také prvočísla.
10. Najděte $m \in \mathbb{R}$ takové, že kořeny rovnice $x^3 - 12x^2 + mx - 60 = 0$ jsou délky stran pravoúhlého trojúhelníku.
11. Existuje trojúhelník. jehož všechny výšky jsou menší než $1\,cm$ a jehož obsah je větší než $1\,m^2$?
12. Rozhodněte, zda existuje trojúhelník, jehož dvě výšky jsou delší než $1\,m$ a jehož obsah je menší než $1\,cm^2$.
13. Mohou existovat dva neshodné trojúhelníky, které se shodují ve velikostech všech vnitřních úhlů a mají stejně dlouhé dvě strany?
14. Je možné, aby v některém čtyřstěnu leželi čtyři středy kružnic opsaných trojúhelníkům jeho stěn v jedné rovině?
15. Najděte alespoň jedno řešení rovnice $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x^a}}}}}} = a$.
16. $\heartsuit$, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno $y \in \mathbb{R}$ takové, že $(x+1)^3 - x^3 = 3y + 1$.
17. $\heartsuit$, že rovnice $e^x = ex^2 + \ln x$ má alespoň jeden kořen v intervalu $(0, 2)$ a alespoň jeden kořen v intervalu $(2, \infty)$.
18. $\heartsuit$, že rovnice $2 - \cos x = \operatorname{cotg} x$ má alespoň jeden kořen v intervalu $\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \rangle$.
19. $\heartsuit$, že z libovolných osmi přirozených čísel můžeme vybrat dvě, jejichž rozdíl je dělitelný sedmi.
20. $\heartsuit$, že v každém čtverci s rozměry $6 \times 6\,cm$, kde je zakresleno 37 bodů, existuje čtverec, který obsahuje aspoň pět z daných bodů.
21. Na šachovnici 8×8 stojí 33 věží. $\heartsuit$, že z nich lze vybrat 5, které se vzájemně neohrožují.
22. Hrací plán na *Člověče, nezlob se* je tvořen kružnicí s 36 políčky. Kolik nejméně potřebujeme figurek, abychom při jejich libovolnén rozmístění a libovolném hodu kostkou mohli nějakou figurku jinou figurkou vyhodit?
23. Najděte co nejdelší aritmetickou posloupnost přirozených čísel s diferencí 60, která je tvořena samými prvočísly. $\heartsuit$, že nelze najít delší taková posloupnost.
24. $\heartsuit$, že mezi libovolnými 101 reálnými čísly existují dvě čísla u a v, pro něž platí

$$100|u - v||1 - uv| \leq (1 + u^2)(1 + v^2).$$