Stereometrie

sada domácích úkolů
termín odevzdání do 18.5.2024

Pro splnění domácího úkolu je nutno odevzdat právě 6 úloh, z toho alespoň jeden řez.

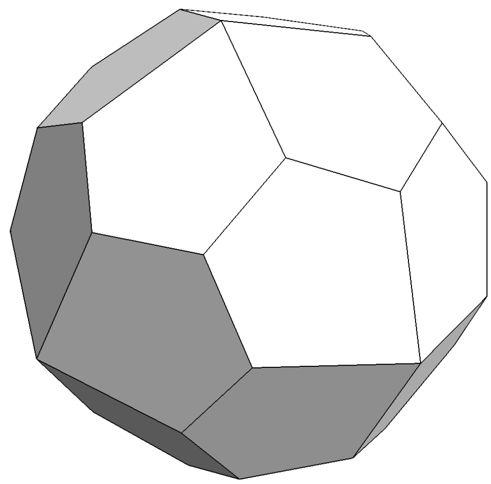
Řešení odevzdávejte do moodle v jednom souboru ve formátu .pdf; buďto čitelně napsané + výrazně narýsované + kvalitně naskenované, nebo vypracováno v nějakém textovém (např. LaTeX, nebo MS Word) a grafickém editoru (např. GeoGebra). Úkoly po odevzdání okomentuji a pošlu zpátky.

Pozn. 1.: Sloučení skenu do .pdf je součastí běžně dostupného softwaru, obyčejně postačuje kvalita 200-300dpi. Další možnost je použít Adobe Acrobat Pro,kde je možné vytvořit sloučené .pdf z různých vstupních souborů (obrázky, dokumenty). V MacOS je možné jednoduše použít ke stejnému účelu zabudovaný program Preview.
Pozn. 2.: Najdete-li chybu, neváhejte mi napsat, může to ušetřit tápání Vaších kolegů.

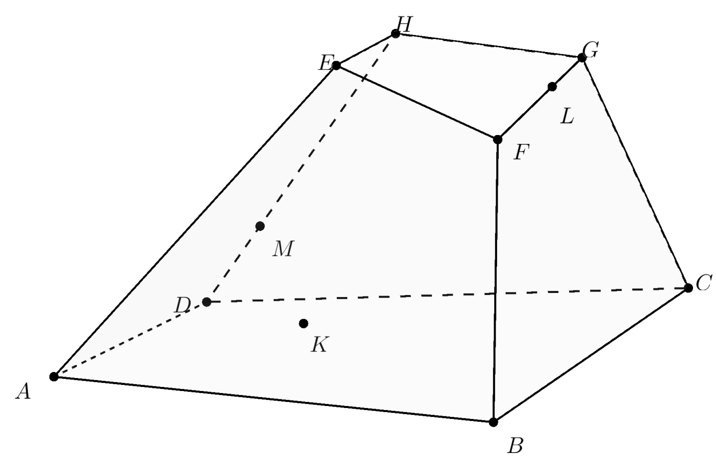
1. Určete co vznikne
   a) kolmým průmětem dvou vzájemně kolmých přímek v prostoru do roviny.
   b) rovnoběžným průmětem dvou vzájemně rovnoběžných přímek v prostoru do roviny.
2. Jsou dány mimoběžky $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$. Dokažte, že středy úseček $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BC}, \overline{BD}$ jsou vrcholy rovnoběžníku jehož rovina je rovnoběžná s přímkami $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$.
3. Je dána krychle $ABCDEFGH$.
   a) Zjistěte a zdůvodněte jestli je $BH \perp EG$.
   b) Zjistěte a zdůvodněte jestli jsou k sobě kolmé tělesové uhlopříčky.
   c) Určete odchylku přímek $|\sphericalangle(AH, EB)|$.
   d) Určete odchylku přímky a roviny $|\sphericalangle(BH, DCG)|$.
   e) Určete odchylku rovin $|\sphericalangle(BDE, BDG)|$.
   f) Určete vzdálenost bodu od roviny $|(C, BDG)|$.
   g) Určete vzdálenost přímek $|(AC, BH)|$.
4. Je dána krychle $ABCDEFGH$ (ve standardním značení) a bod P na hraně EF tak, že platí $(EF; P) = 2$. Určete
   a) Vzdálenost bodu B od roviny ACP.
   b) Odchylku přímek BP a CH.
   c) Odchylku rovin BCP a ADH.
5. Určete vzdálenost přímek ve kterých leží mimoběžné hrany pravidelného čtyřstěnu o délce hrany a.
6. Fotbalový míč se skládá z pravidelných 5-ti a 6-ti úhelníkových plátů. Zjistěte kolik je pětiúhelníkových plátů.
   Náčrtek není potřeba.
7. Je dán konvexní polopravidelný mnohostěn, jehož stěny jsou shodné čtverce a shodné rovnostranné trojúhelníky. Dále platí, že žádné dvě čtvercové stěny ani žádné dvě trojúhelníkové stěny nemají společnou hranu. Určete počet vrcholů, počet hran a celkový součet vnitřních úhlů všech stěn.

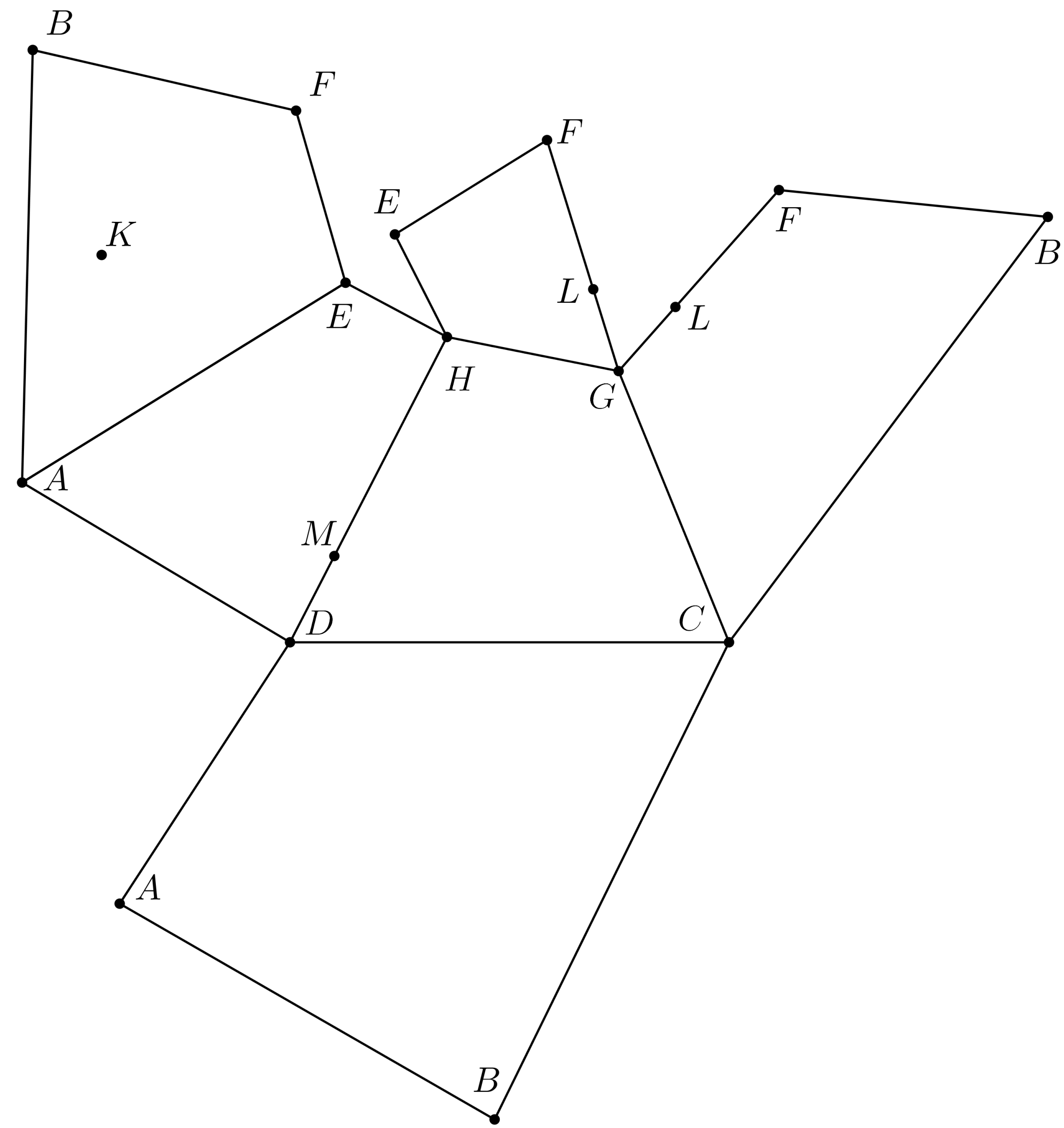
8. Určete všechna Archimédovská tělesa (konvexní jejichž hrany jsou stejně dlouhé a stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky, přičemž pravidelnost rozložení stěn a hran se opakuje v každém vrcholu) ze shodných trojúhelníků a čtverců.

9. Určete počet stěn Catalanovského tělesa (duální k Archimédovskému; jehož stěny jsou shodné a obsahují hrany dvou shodných typů: 3 kratší a 2 delší, úhel mezi delšími stranami jedné stěny je přibližně 81°, pravidelnost rozložení hran a vrcholů se opakuje v každé stěně).

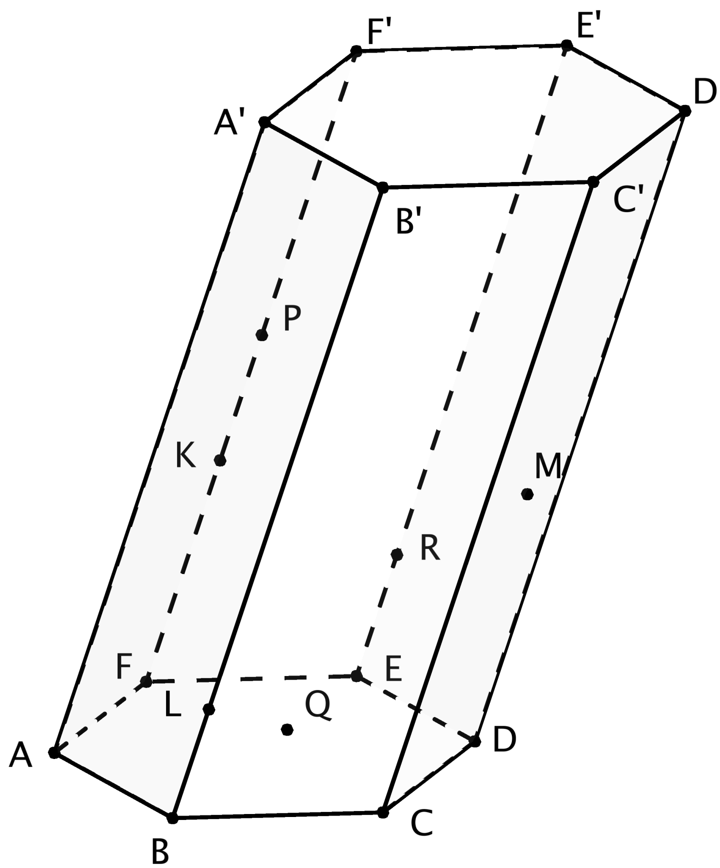


10. Sestrojte řez zřezaného čtyřbokého jehlanu $ABCDEFGH$ rovinou KLM, přičemž bod K leží ve stěně $ABFE$, bod L na hraně FG a M na hraně DH. Řez vyznačte do rovnoběžného průmětu (níže) a do sítě tělesa (na druhé straně).

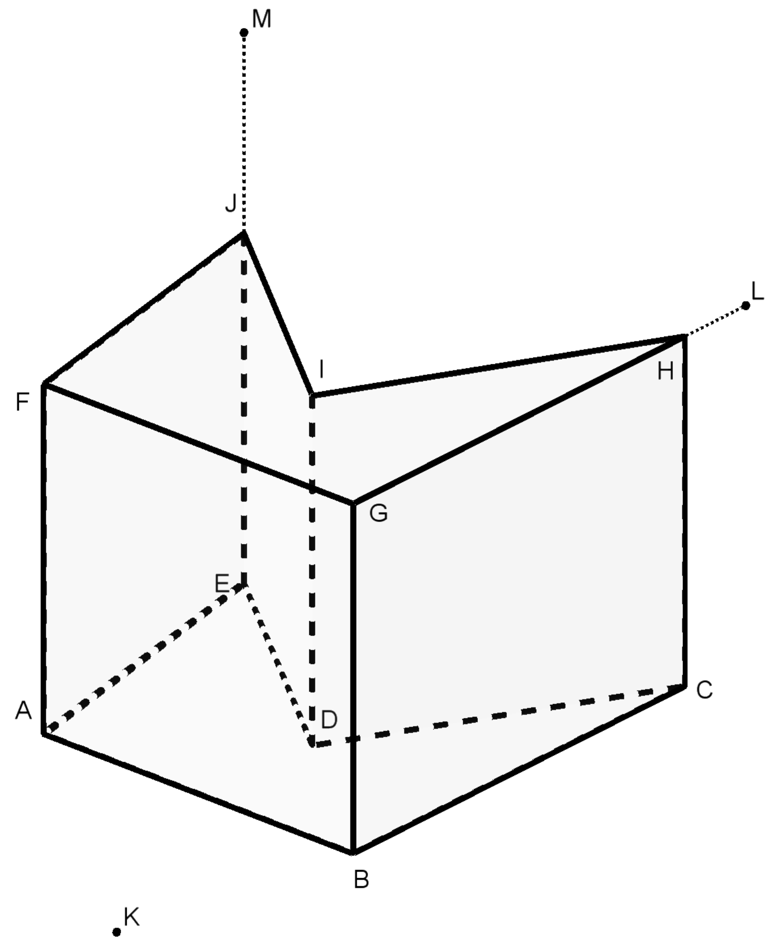



B
F
F
E
K
F
B
L
L
E
H
G
A
M
D
C
A
B

11. Zobrazte řezy hranolu $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ rovinami $\alpha = KLM$ a $\beta = PQR$.
$K \in \overline{FF'}$, $L \in \overline{BB'}$, M leží v boční stěně $CDD'C'$
$P \in \overline{FF'}$, $R \in \overline{EE'}$, Q leží v boční stěně $BCC'B'$
Dále zobrazte průsečnici r rovin α a β a její viditelnost vzhledem k hranolu.



12. Sestrojte řez hranolu $ABCDEFGHIJ$ rovinou ρ procházející body K, L, M, přičemž bod K leží v rovině $ABGF$, bod L na přímce GH a bod M na přímce EJ. Neviditelné čáry řezu zaznačte přerušovaně.



13. Je dán pravidelný trojboký hranol $ABCA'B'C'$ s dolní podstavou ABC, v němž $|AB| = a,\ |AA'| = 3a$.

    a) Na hraně AA' je zvolený bod E tak, že $|AE| = a$, na hraně $|BB'|$ je zvolený bod F tak, že $|BF| = 2a$. Řez rovinou EFC rozdělí hranol na dvě části. Vypočtěte objemy obou částí.

    b) Na hranách BB' a CC' najděte body G, H tak aby byl $\triangle AGH$ rovnoramenný pravoúhlý.

14. Je dán komolý jehlan se spodní podstavou $ABCD$ o obsahu $16cm^2$, vrchní podstavou $A'B'C'D'$ o obsahu $9cm^2$ a výškou $1cm$, který vznikne zřezáním pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ tak, že $A' \in AV, B' \in BV, C' \in CV$ a $D' \in DV$. Určete

    a) Vzdálenost přímky, ve které leží boční hrana daného komolého jehlanu, od libovolné mimoběžné přímky, ve které leží hrana spodní podstavy.

    b) Odchylku sousedních bočních stěn komolého jehlanu.

15. Rotační kužel a rotační válec mají společnou podstavu. Vrchol kužele leží ve středu horní podstavy válce. Vypočítejte odchylku osy kužele od jeho strany, jsou-li povrchy válce a kužele v poměru $7 : 4$.

16. Základny osového řezu (řezu rovinou procházející osou) rotačního komolého kužele mají délky $z_1 = 6$ a $z_2 = 2$ a jeho uhlopříčky stojí k sobě kolmo. Pomocí čísel z_1, z_2 vypočítejte odchylku strany komolého kužele od roviny větší podstavy.

17. Součet poloměru podstavy a délky površky rotačního kužele je $m = 9$. Odchylka površky kužele od roviny podstavy je $\alpha = 60°$. Vypočítejte povrch kužele.

18. Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací pravoúhlého $\triangle ABC$ kolem přepony AB, znáte-li jeho obsah S a délku přepony $|AB| = c$.

19. Určete objem a povrch tělesa, které vznikne otáčením pravoúhlého trojúhelníku $\triangle ABC$ kolem osy procházející vrcholem pravého úhlu a rovnoběžné s přeponou, jsou-li dány velikosti odvesen a a b trojúhelníku $\triangle ABC$.

20. Ostroúhlý trojúhelník se otočil postupně kolem svých stran o délkách a, b a c. Určete jaký je poměr objemů takto vzniklých těles $V_a : V_b : V_c$ vzhledem k délkám stran.

21. Do kulové plochy poloměru $r = 2$ je vepsán čtyřstěn $ABCD$ s největším možným objemem tak, že hrana AB je průměr dané kulové plochy. Určete objem tělesa, které vznikne odebráním čtyřstěnu $ABCD$ z kulové plochy.

22. Kulová plocha o poloměru $r = 3$ je vepsána rotačnímu kuželu o výšce $v = 8$ (koule se dotýká pláště i podstavy). Určete objem části kuželu mezi vrcholem a kulovou plochou.

23. Kouli o objemu 1 je vepsána krychle. Této krychli je vepsána koule. Určete objem vepsané koule.

24. Kouli je opsán rotační kužel, jehož výška se rovná šestinásobku poloměru koule.

    a) V jakém poměru jsou povrchy obou těles?

    b) Určete obvod kružnice, podél níž se koule dotýká kuželu.

25. Do pravidelného trojbokého hranolu s podstavnou hranou délky a je vepsána koule (dotýká se všech stěn). Vypočtěte objem a povrch tělesa, které vznikne odebráním koule z hranolu.

26. Je dána krychle o povrchu $S = 96$. Vypočtěte povrch kuželu, jehož podstava je kruh opsaný stěně krychle a řez kuželu protější stěnou krychle je její kruh vepsaný.

27. Je dán rotační kužel, jehož obsah pláště je 15. Plášť kužele po rozvinutí vytvoří čtvrtkruh. Určete objem kužele.

28. Do pravidelného čtyřstěnu o hraně délky a je vepsán duální čtyřstěn. Vypočtěte objem a povrch tělesa, které vznikne po odebrání menšího čtyřstěnu z většího.

29. Objem kulové úseče o výšce $v = 6$ je $V = 228\pi$. Vypočtěte objem koule, jejíž částí je kulová úseč.
    Nápověda: Objem kulové úseče o výšce v a poloměru podstavy r je $V = \frac{1}{6}\pi(3r^2 + v^2)v$.

30. Jsou dány 2 shodné pravidelné čtyřboké jehlany o objemu V, které mají všechny hrany stejně dlouhé. Určete délku hrany a povrch konvexního osmistěnu, který vznikne slepením podstav obou jehlanů.

31. Je dán pravidelný osmistěn o hraně délky a. Určete v jakém poměru jsou povchy koule opsané, koule vepsané a koule dotýkající se hran osmistěnu a seřaďte je podle velikosti.

32. Je dán komolý rotační kužel s povrchem $S = 140\pi$, obsahem pláště $P = 60\pi$ a stranou délky 5 (délka površky komolého kužele). Určete poloměry podstav komolého kužele.

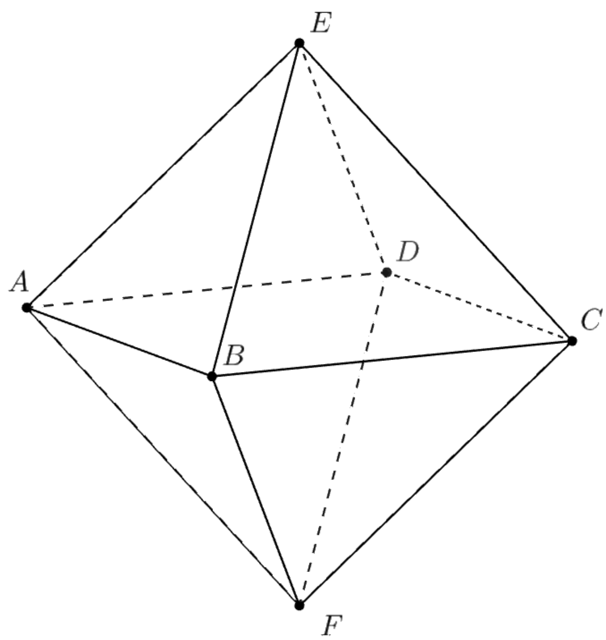
33. Jsou dány mimoběžné přímky a a b. Určete (a načrtněte) množinu středů všech úseček, z nichž každá má jeden krajní bod na přímce a a druhý krajní bod na přímce b.

34. Určete množinu všech bodů v prostoru, které mají od dvou různých rovin vzdálenosti v daném poměru $0 < \frac{p}{q} \neq 1$.

35. Určete množinu všech středů kružnic na kulové ploše, jejichž roviny procházejí pevnou přímkou.

36. Je dán pravoúhlý čtyřstěn $ABCD$ s pravými úhly při vrcholu D. Označme K, L, M po řadě středy jeho hran BC, CA, AB. Dokažte, že součet velikostí tří úhlů ve stěnách při vrcholu D čtyřstěnu $KLMD$ je $180°$.

37. V prostoru je dán pravidelný osmistěn $ABCDEF$ o hraně délky a zobrazen v rovnoběžném promítání



(a) Sestrojte řez hranolu rovinou $\rho = ABS_{CE}$, přičemž bod S_{CE} je středem hrany CE. Neviditelné čáry řezu zaznačte přerušovaně.

(b) Klasifikujte typ mnohoúhelníku, který je řezem v a).

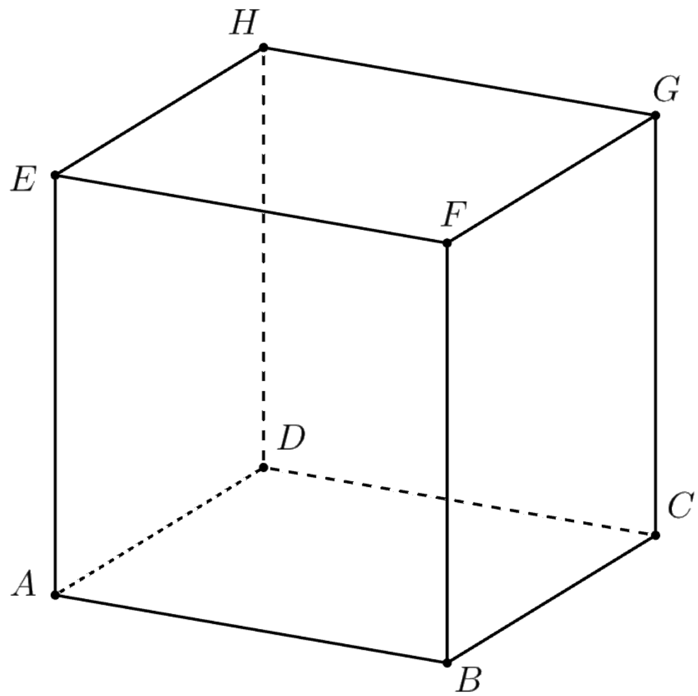
(c) Určete obsah řezu z a).

(d) Určete odchylku stěny ABE od roviny ρ.

(e) Určete vzdálenost vrholu E od roviny ρ.

(f) Určete objem osmistěnu bez mensí části oddělené rovinou ρ.

38. V prostoru je dána papírova krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky a zobrazena v rovnoběžném promítání, ze které si chceme postavit model vesmírné lodě.



(a) Model vytvoříme tak, že z krychle uřízneme vrcholy A a B a to tak, že roviny řezů jsou $\rho = (S_{AB}, D, E)$ a $\sigma = (S_{AB}, C, F)$, kde S_{AB} je střed hrany AB. Sestrojte tyto řezy. Neviditelné čáry řezu zaznačte přerušovaně.

(b) Obě části pak slepíme v trojúhelnících $\triangle S_{AB}DE$ a $\triangle S_{AB}CF$ (v tomto pořadí vrcholů). Určete kolik j^2 papíru budeme na model potřebovat v závislosti na délce hrany krychle.

(c) Určete šířku vesmírné lodě, t.j. $|AB|$ po slepení.

(d) Načrtněte síť tělesa, které je modelem.