

Stereometrie

Stereometrie

Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

2022

`www.karlin2.mff.cuni.cz/~zamboj/`

Body, přímky a roviny v prostoru

Základní objekty v prostoru: body, přímky, roviny

Definice

Čtyři body (a více) v prostoru ležící v jedné rovině nazýváme *komplanární*.

Množina všech přímek prostoru, které leží v jedné rovině a jsou všechny vzájemně rovnoběžné, nebo procházejí jedním bodem se nazývá *svazek přímek*.

Množina všech rovin prostoru, které mají společnou jednu přímku, nebo jsou všechny vzájemně rovnoběžné se nazývá *svazek rovin*.

Množina všech přímek prostoru, které procházejí jedním bodem se nazývá *trs přímek*.

Množina všech rovin prostoru, které procházejí jedním bodem se nazývá *trs rovin*.

Vzájemná poloha dvou přímek

Definice (Vzájemná poloha dvou přímek)

Dvě přímky jsou vzájemně

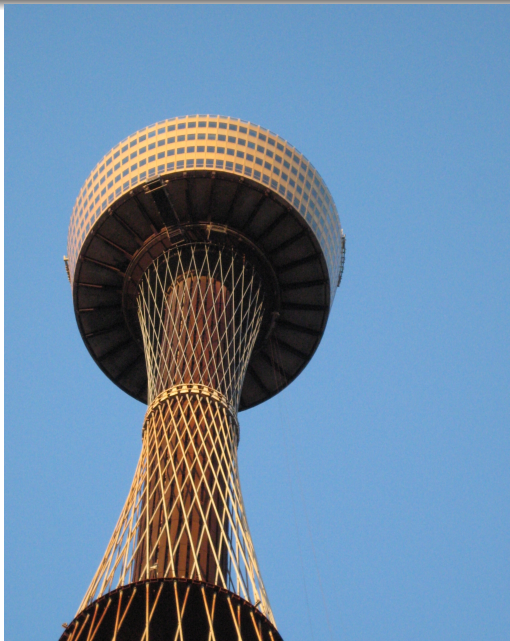
totožné - mají-li společné alespoň dva (t.j. pak všechny) body

různoběžné - mají-li společný právě jeden bod

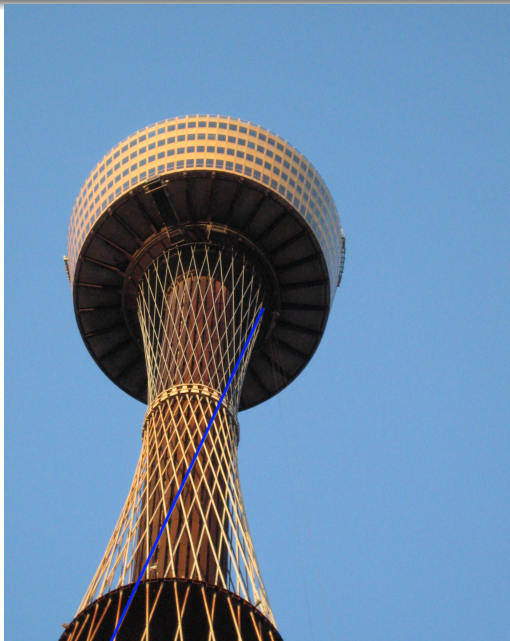
rovnoběžné - nemají-li společný žádný bod a leží v jedné rovině

mimoběžné - nemají-li společný žádný bod a neleží v jedné rovině

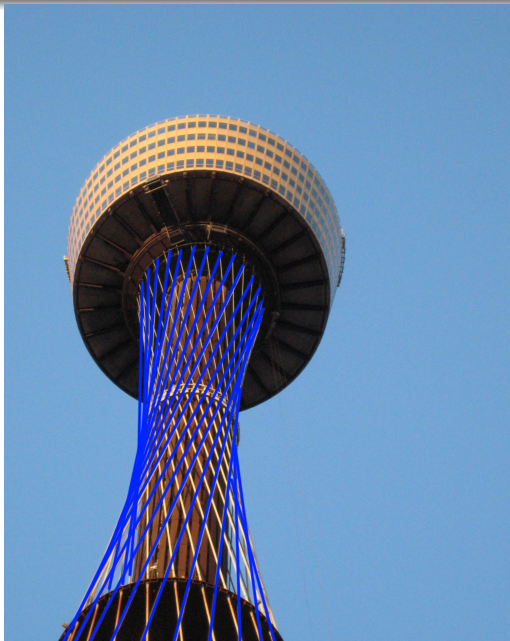
Vzájemná poloha dvou přímek



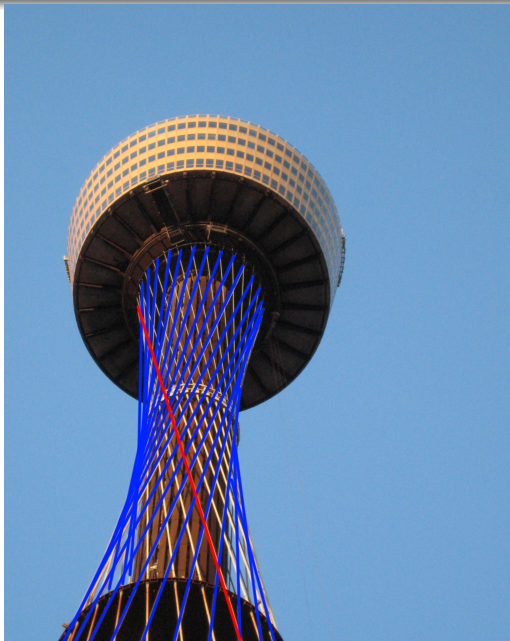
Vzájemná poloha dvou přímek



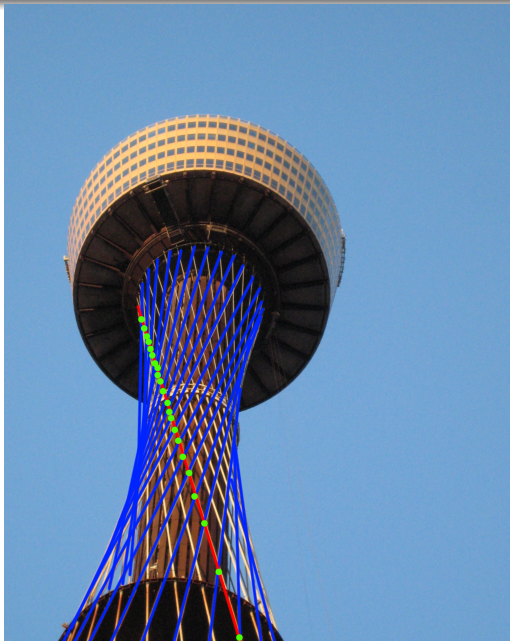
Vzájemná poloha dvou přímek



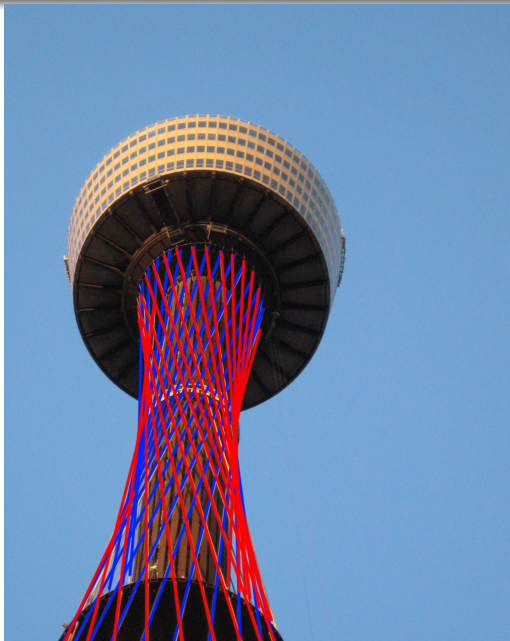
Vzájemná poloha dvou přímek



Vzájemná poloha dvou přímek



Vzájemná poloha dvou přímek



Příčka mimoběžek

Definice (Příčka mimoběžek)

Příčka mimoběžek je přímka, která protíná obě mimoběžky.

Příklad (Sestrojte příčku mimoběžek p, q daným bodem A .)

- 1 $\alpha = pA$
- 2 $Q \in \alpha \cap q$
- 3 $\overleftrightarrow{AQ} \cap p = P$
- 4 $\overleftrightarrow{PQ}$

Příklad (Sestrojte příčku mimoběžek p, q daným směrem $\vec{s}$.)

- 1 $\alpha = p\vec{s}$ (volíme směrem $\vec{s}$ libovolnou různoběžku s přímkou p)
- 2 $Q \in \alpha \cap q$
- 3 $k = (Q\vec{s}) \cap p = P$ (k je přímka procházející bodem Q ve směru $\vec{s}$)
- 4 $\overleftrightarrow{PQ}$

Vzájemná poloha přímky a roviny

Definice (Vzájemná poloha přímky a roviny)

Přímka buď leží v rovině, nebo jsou vzájemně

různoběžné - mají-li společný právě jeden bod

rovnoběžné - nemají-li společný žádný bod

Věta (Kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny)

Přímka je rovnoběžná s rovinou, ve které neleží, právě tehdy, když je rovnoběžná alespoň s jednou její přímkou.

Vzájemná poloha přímky a roviny



Vzájemná poloha přímky a roviny



Vzájemná poloha dvou rovin

Definice (Vzájemná poloha dvou rovin)

Dvě roviny jsou vzájemně

totožné - mají-li společné všechny body

různoběžné - mají-li společnou přímku - *průsečnice*

rovnoběžné - nemají-li společný žádný bod

Věta (Kritérium rovnoběžnosti dvou rovin)

Dvě různé roviny jsou rovnoběžné právě tehdy, když jedna rovina obsahuje dvě různoběžky, které jsou s druhou rovinou rovnoběžné.

Příklad

Určete všechny vzájemné polohy tří rovin v prostoru.

Definice (Kolmost dvou mimoběžek)

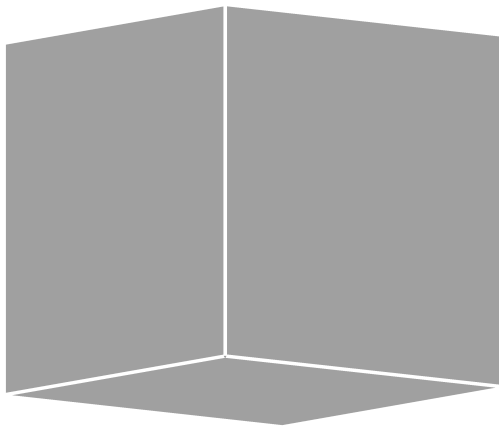
Dvě mimoběžky jsou na sebe kolmé právě tehdy, jsou-li na sebe kolmé přímky vedené libovolným bodem prostoru rovnoběžně s danými mimoběžkami.

Příklad

Na obrázku je rovnoběžný průmět krychle do roviny.

- a) Doplňte neviditelné hrany.
- b) Určete dvojici vzájemně mimoběžných přímek mimoběžných k libovolné hraně.
- c) Sestrojte příčku kolmou k oboum ze zvolené dvojice mimoběžek.

Kolmost dvou přímek



Definice (Kolmost přímky a roviny)

Přímka je kolmá k rovině, je-li kolmá ke všem přímkám roviny.

Věta (Kritérium kolmosti přímky a roviny)

Přímka je kolmá k rovině právě tehdy, když je kolmá ke dvěma různoběžným přímkám roviny.

Definice (Osa mimoběžek)

Osa mimoběžek (nejkratší příčka) je příčka kolmá k oboum mimoběžkám.

Příklad (Sestrojte osu (nejkratší příčku) mimoběžek a, b)

- vedeme libovolným bodem přímky a rovnoběžku $b' \parallel b$
- sestrojíme kolmici k k rovině určené a, b' a najdeme příčku mimoběžek a, b daným směrem (určeným přímkou k).

nebo užitím kolmosti přímek a rovin.

Kolmost dvou rovin

Definice (Kolmost dvou rovin)

Dvě roviny jsou na sebe kolmé jsou-li k sobě kolmé jejich kolmice.

Věta (Kritérium kolmosti dvou rovin)

Dvě roviny jsou na sebe kolmé právě tehdy, když existuje přímka jedné roviny kolmá na alespoň dvě různoběžné přímky druhé roviny.

Příklad

Formulujte co nejjednodušší podmínku pro kolmost roviny ke dvěma různoběžným rovinám.

Pravoúhlý (kolmý) průmět

Definice (Kolmý průmět)

Kolmý průmět B' bodu B do roviny ρ je průsečík kolmice k vedené daným bodem B k rovině ρ a roviny ρ .

Kolmý průmět B' bodu B na přímku p je průsečík roviny κ vedené daným bodem B kolmé k přímce p a přímky p .

Kolmý průmět p' přímky p do roviny ρ , které nejsou vzájemně kolmé, je průsečnice roviny κ obsahující danou přímku p kolmé k rovině ρ a dané roviny ρ .

Kolmý průmět přímky do roviny, která je na ní kolmá je jejich průsečík.

Odchylka dvou přímk

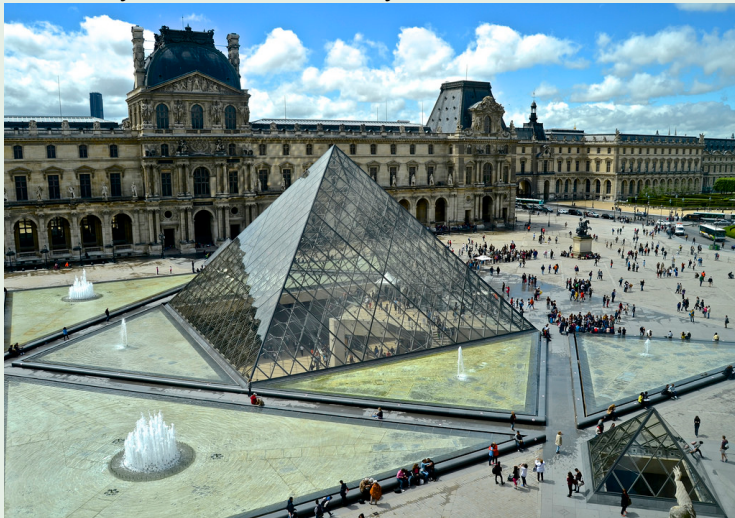
Definice (Odchylka dvou mimoběžek)

Odchylka dvou mimoběžných přímek je odchylka různoběžných přímek vedených libovolným bodem prostoru rovnoběžně k daným mimoběžkám.

Odchyłka dvou přímek

Příklad

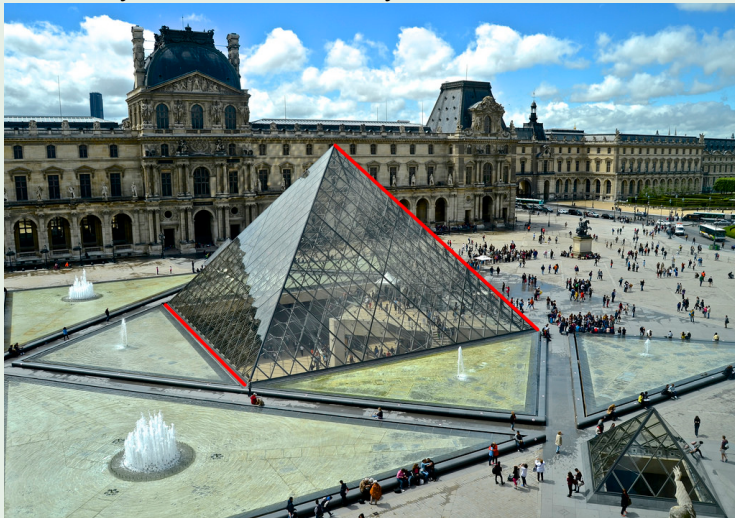
Určete odchytku dvou mimoběžných hran Louvru.



Odchyłka dvou přímek

Příklad

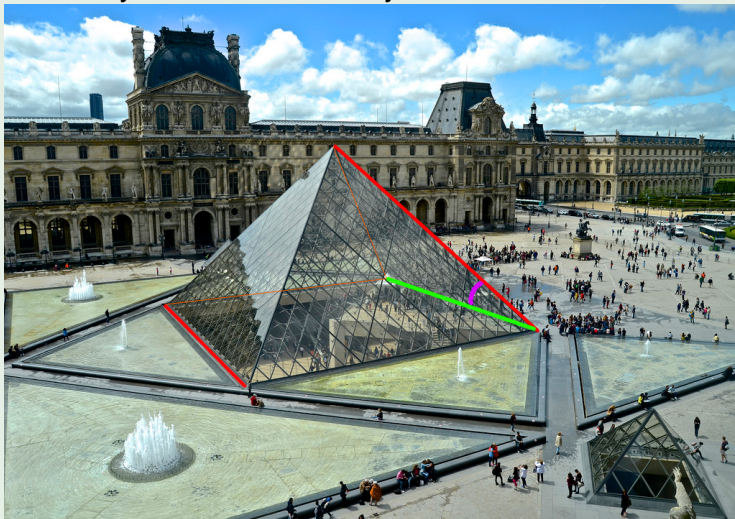
Určete odchyłku dvou mimoběžných hran Louvru.



Odchyłka dvou přímek

Příklad

Určete odchyłku dvou mimoběžných hran Louvru.



Definice (Odchylka přímky a roviny)

Není-li přímka kolmá k rovině, je odchylka přímky a roviny rovna odchylce přímky a jejího pravoúhlého průmětu do této roviny.

Odchylka dvou rovin

Definice (Odchylka dvou rovin)

Odchylka dvou rovin je odchylka jejich průsečnic s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá.

Věta

Odchylka dvou rovin je odchylka kolmých přímek k daným rovinám.

Vzdálenost bodu od roviny

Definice (Vzdálenost bodu od roviny)

Vzdálenost bodu od roviny je rovna vzdálenosti bodu od jeho kolmého průmětu do dané roviny.

Definice (Vzdálenost dvou přímek)

Vzdálenost dvou totožných a dvou různoběžných přímek je nulová.

Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek je vzdálenost libovolného bodu jedné přímky od druhé přímky.

Vzdálenost dvou mimoběžek je délka nejkratší příčky mimoběžek.

Definice (Vzdálenost dvou rovin)

Vzdálenost dvou totožných a dvou různoběžných rovin je nulová.

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin je vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé roviny.

Definice (Geometrické těleso)

Geometrické těleso je omezený prostorový útvar, jehož hranicí je uzavřená plocha.

Tělesa dělíme na

- 1
 - konvexní
 - nekonvexní
- 2
 - hranatá
 - oblá

Definice (Mnohostěn a konvexní mnohostěn)

Mnohostěn je geometrické těleso, jehož hranici tvoří mnohoúhelníky. Je-li dané těleso konvexní, nazýváme jej *konvexní mnohostěn*.

Mnohostěny - Eulerova věta

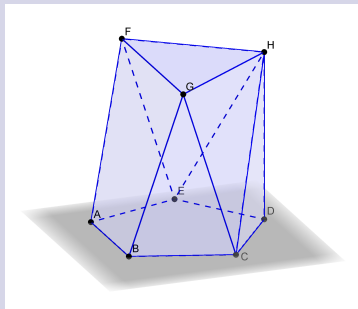
Věta (Eulerova věta pro mnohostěny)

Nechť S je počet stěn, H je počet hran a V je počet vrcholů konvexního mnohostěnu, pak platí:

$$S - H + V = 2.$$

$\chi = S - H + V$ nazýváme Eulerova charakteristika.

Důkaz



Všechny stěny, které nejsou trojúhelníky, rozdělíme na trojúhelníky.

Mnohostěny - Eulerova věta

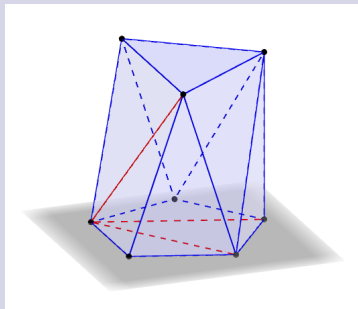
Věta (Eulerova věta pro mnohostěny)

Nechť S je počet stěn, H je počet hran a V je počet vrcholů konvexního mnohostěnu, pak platí:

$$S - H + V = 2.$$

$\chi = S - H + V$ nazýváme Eulerova charakteristika.

Důkaz



Všechny stěny, které nejsou trojúhelníky, rozdělíme na trojúhelníky.

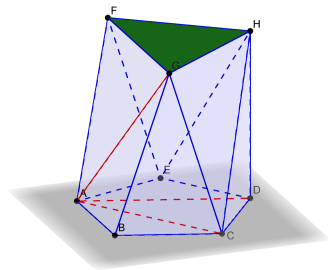
Každému n -úhelníku pro $n > 3$ tak přidáme $n - 3$ hran a jedna n -úhelníková stěna se změní na $n - 2$ stěn.

Charakteristika se nezmění

$$\chi = (S - 1 + n - 2) - (H + n - 3) + V = 2$$

Mnohostěny - Eulerova věta

Důkaz



Odebereme jeden trojúhelník:

$$\chi = (S, H, V) \rightarrow$$

$$\chi' = (S - 1, H, V)$$

$$\chi = \chi' + 1$$

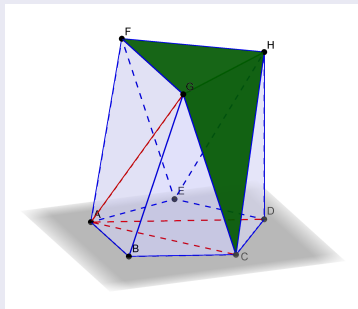
Máme 2 možnosti jak odebírat další trojúhelníky:

- 1) Odebereme $\triangle$ který má s již odebranými společnou jednu hranu
- 2) Odebereme $\triangle$ který má s již odebranými společné dvě hrany

Mnohostěny - Eulerova věta

Důkaz

1) Odebereme $\triangle$ který má s již odebranými společnou jednu hranu



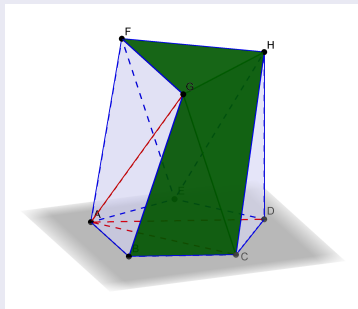
Hodnota χ' se nezmění:

$$\chi' = (S - 1, H, V) \rightarrow$$

$$\chi' = (S - 2, H - 1, V)$$

Důkaz

1) Odebereme $\triangle$ který má s již odebranými společnou jednu hranu



Hodnota χ' se nezmění:

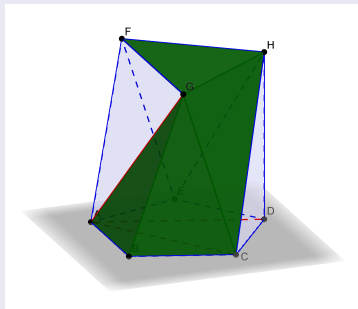
$$\chi' = (S - 1, H, V) \rightarrow$$

$$\chi' = (S - 2, H - 1, V) = (S', H', V')$$

Stejně tak pro další odebrané
trojúhelníky podle tohoto pravidla.

Důkaz

1) Odebereme $\triangle$ který má s již odebranými společnou jednu hranu



Hodnota χ' se nezmění:

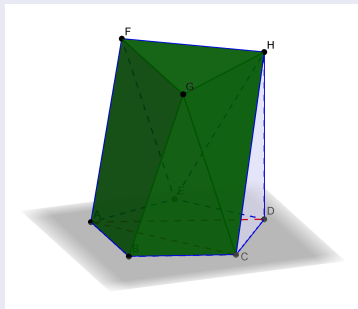
$$\chi' = (S', H', V') \rightarrow$$

$$\chi' = (S' - 1, H' - 1, V')$$

Stejně tak pro další odebrané
trojúhelníky podle tohoto pravidla.

Důkaz

2) Odebereme $\triangle$ který má s již odebranými společné dvě hrany



Hodnota χ' se nezmění:

$$\chi' = (S', H', V') \rightarrow$$

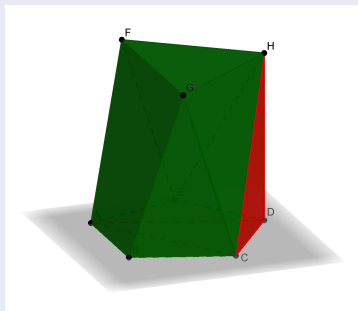
$$\chi' = (S' - 1, H' - 2, V' - 1)$$

Stejně tak pro další odebrané trojúhelníky podle tohoto pravidla.

Mnohostěny - Eulerova věta

Důkaz

Pokračujeme až kým nezbyde poslední trojúhelník:



V posledním kroku dostáváme:

$$\chi' = (S', H', V') = (1, 3, 3)$$

$$\chi' = 1 - 3 + 3 = 1$$

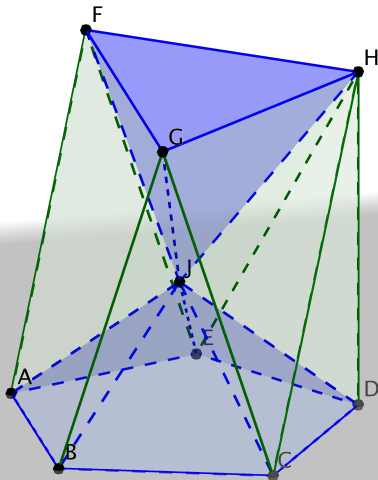
$$\chi = \chi' + 1 = 2$$

Pozn. Pozor na nekonvexní a děravé tělesa!

Mnohostěny - Eulerova věta

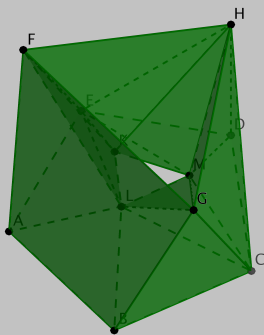
Příklad

Spočtěte Eulerovu charakteristiku nekonevného tělesa.



Příklad

Spočtěte Eulerovu charakteristiku nekonevexního tělesa s dírou.



Platónská tělesa

Definice (Platónská těleso)

Pravidelný konvexní mnohostěn, z jehož každého vrcholu vychází stejný počet hran a jehož stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky nazýváme *platónske těleso*.

Věta (Platónská tělesa)

Existuje právě 5 platónských těles.

Důkaz

V každém vrcholu se střetnou alespoň 3 stěny - mnohoúhelníky.

$\sum \angle$ ve vrcholu je $< 2\pi$.

Stěny jsou tedy rovnostranné $\triangle$ (3,4,5 v jednom vrcholu), $\square$, nebo pravidelné 5-úhelníky.

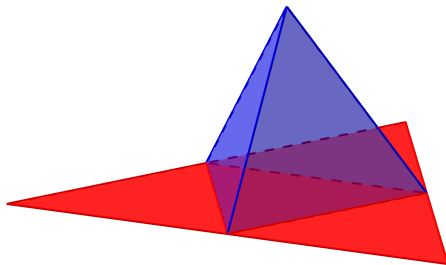
Platónská tělesa

Věta (Platónská tělesa)

Existuje právě 5 platónských těles.

Důkaz

Pro 3 rovnostranné $\triangle$ v jenom vrcholu - čtyřstěn.



$$S = 4, H = 6, V = 4$$

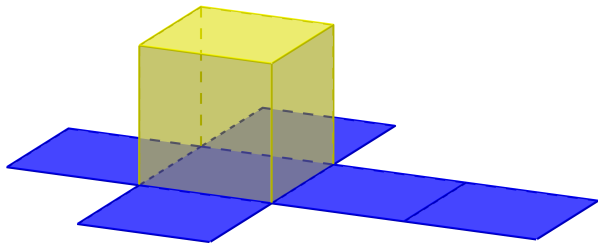
Platónská tělesa

Věta (Platónská tělesa)

Existuje právě 5 platónských těles.

Důkaz

Pro $\square$ - krychle.



$$S = 6, H = 12, V = 8$$

Platónská tělesa

Věta (Platónská tělesa)

Existuje právě 5 platónských těles.

Důkaz

Dále využijeme Eulerovu větu:

pro 4 $\triangle$ máme $H = \frac{4V}{2}$; $S = \frac{4V}{3} \rightarrow S = 8, H = 12, V = 6$ - osmistěn

pro pětiúhelníky máme $H = \frac{3V}{2}$; $S = \frac{3V}{5} \rightarrow S = 12, H = 30, V = 20$ - dvanáctistěn

pro 5 $\triangle$ máme $H = \frac{5V}{2}$; $S = \frac{5V}{3} \rightarrow S = 20, H = 30, V = 12$ - dvacetistěn

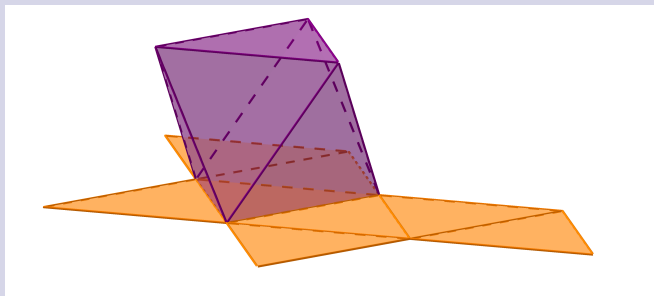
Platónská tělesa

Věta (Platónská tělesa)

Existuje právě 5 platónských těles.

Důkaz

Pro 4 rovnostranné $\triangle$ - osmistěn.



$$S = 8, H = 12, V = 6$$

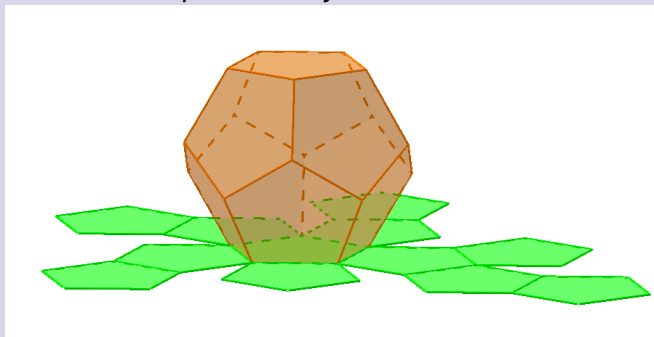
Platónská tělesa

Věta (Platónská tělesa)

Existuje právě 5 platónských těles.

Důkaz

Pro pětiúhelníky - dvanáctistěn.



$$S = 12, H = 30, V = 20$$

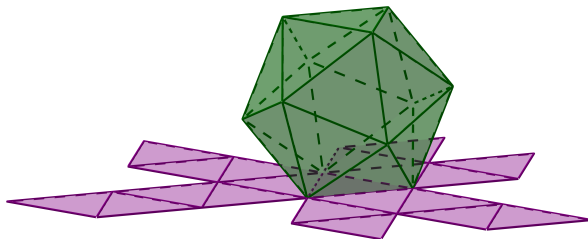
Platónská tělesa

Věta (Platónská tělesa)

Existuje právě 5 platónských těles.

Důkaz

Pro 5 rovnostranných $\triangle$ - dvacetistěn.



$$S = 20, H = 30, V = 12$$

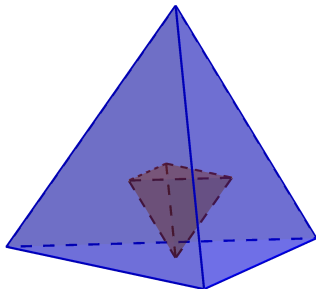
Můžeme-li vepsat platónské těleso do jiného tak, že v každé stěně opsaného tělesa leží právě jeden vrchol vepsaného tělesa, nazýváme je vzájemně duální (záměna pojmu vrchol a stěna).

čtyřstěn $\leftrightarrow$ čtyřstěn

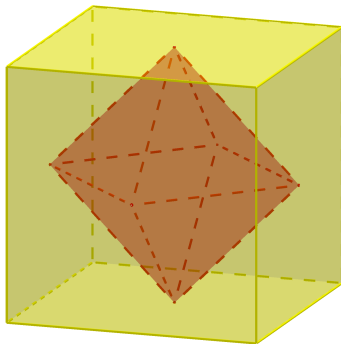
krychle $\leftrightarrow$ osmistěn

dvanáctistěn $\leftrightarrow$ dvacetistěn

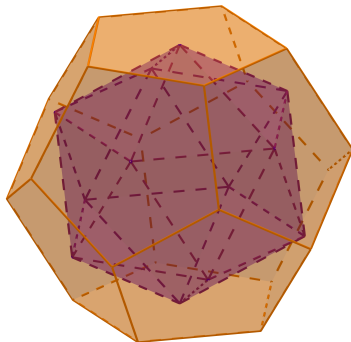
čtyřstěn $\leftrightarrow$ čtyřstěn



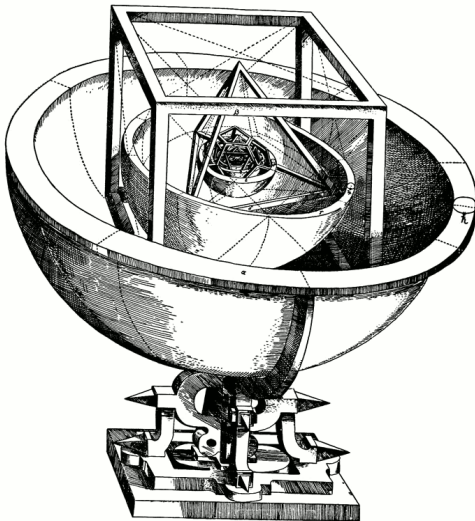
krychle $\leftrightarrow$ osmistěn



dvanáctistěn $\leftrightarrow$ dvacetistěn

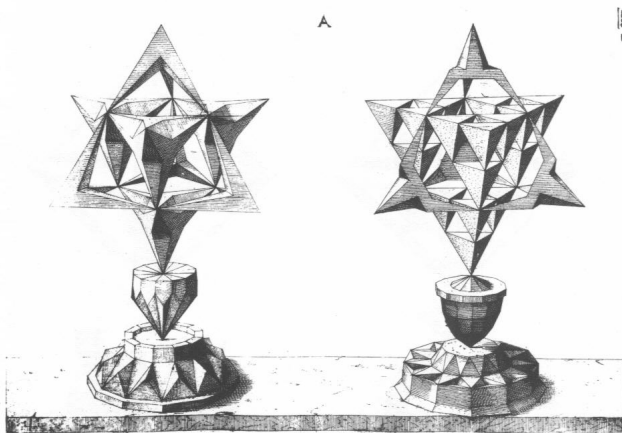


Keplerovo *Mysterium Cosmographicum* (1596)



Polopravidelné mnohostěny

Wentzel Jamnitzer, Perspectiva corporum regularium (1568)



<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~heibisch/cafe/jamnitzer/jamnitzer.html>

Jehlanový prostor a plocha, jehlan

Definice (Jehlanový prostor / jehlanová plocha)

Množina všech přímek procházejících daným bodem V a protínajících mnohoúhelník / obvod mnohoúhelníka m , který leží v rovině ρ neprocházející bodem V , se nazývá *jehlanový prostor* / *jehlanová plocha*.

V - *vrchol* JPr resp. JPl

mnohoúhelník m - *řídící mnohoúhelník* JPr resp. JPl

přímky plochy procházející vrcholy mnohoúhelníka - *hrany* JPr resp. JPl

množina všech přímek plochy, které protínají stranu řídícího mnohoúhelníka - *stěna* JPr resp. JPl.

Definice (Jehlanový prostor / jehlanová plocha)

Je-li m n -úhelník - n -boký jehlanový prostor resp. plocha.

m (ne)konvexní, pak JPr a JPl jsou (ne)konvexní

Přímka, která prochází vrcholem jehlanové plochy se nazývá *vrcholová přímka*.

Rovina, která prochází vrcholem jehlanové plochy se nazývá *vrcholová rovina*.

Definice (Jehlan)

Jehlan je průnik jehlanového prostoru a prostorové vrstvy určené rovinou ρ řídícího mnohoúhelníka a vrcholovou rovinou $\rho' \parallel \rho$.

podstava a boční stěny, podstavní a boční hrany a vrcholy.

Vzdálenost vrcholu od roviny podstavy - *výška* jehlanu.

Sjednocení bočních stěn - *plášť* jehlanu.

Rozložení pláště a podstavy do roviny - *síť* jehlanu.

Definice (Jehlan)

Jehlan se nazývá *kolmý*, má-li podstava střed S a leží-li vrchol V na kolmici k rovině podstavy vztyčené v S . $\overline{SV}$ je *osa* jehlanu. Jinak je jehlan *kosý*.

Jehlan se nazývá *pravidelný*, je-li kolmý a jeho podstava je pravidelný n -úhelník. Jinak je jehlan *nepravidelný*.

Nechť rovina σ protíná boční hrany a je rovnoběžná s rovinou podstavy jehlanu. Průnik jehlanu a prostorové vrstvy určené rovinami ρ a σ se nazývá *komolý jehlan*.

Pravidelný trojboký jehlan se nazývá *čtyřstěn*.

Hranolový prostor a plocha, hranol

Definice (Hranolový prostor / hranolová plocha)

Množina všech přímk směru $\vec{s}$ protínajících mnohoúhelník / obvod mnohoúhelníka m , který leží v rovině ρ různoběžné se směrem $\vec{s}$, se nazývá *hranolový prostor / hranolová plocha*.

$\vec{s}$ - *řídící (vrcholový) směr* HPr resp. HPI

mnohoúhelník m - *řídící mnohoúhelník* HPr resp. HPI

přímky plochy procházející vrcholy mnohoúhelníka - *hrany* HPr resp. HPI

množina všech přímk plochy, které protínají stranu řídícího mnohoúhelníka - *stěna* HPr resp. HPI.

Hranolový prostor a plocha, hranol

Definice (Hranolový prostor / hranolová plocha)

Je-li m n -úhelník - n -boký hranolový prostor resp. plocha. m (ne)konvexní, pak HPr a HPl jsou (ne)konvexní

Přímka, která je rovnoběžná s řídícím směrem hranolové plochy se nazývá *směrová přímka*.

Rovina, která je rovnoběžná s řídícím směrem hranolové plochy se nazývá *směrová rovina*.

Definice (Hranol)

Hranol je průnik hranolového prostoru a prostorové vrstvy určené rovinou ρ řídícího mnohoúhelníka a rovinou $\rho' \parallel \rho; \rho' \neq \rho$.

2 podstavy a boční stěny, podstavní a boční hrany a vrcholy.

Vzdálenost rovin podstav - *výška* hranolu.

Sjednocení bočních stěn - *plášť* hranolu.

Sjednocení pláště a podstav - *síť* hranolu.

Hranolový prostor a plocha, hranol

Definice (Hranol)

Hranol se nazývá *kolmý*, je-li řídicí směr kolmý k rovině podstav. Jinak je hranol *kosý*.

Hranol se nazývá *pravidelný*, je-li kolmý a jeho podstava je pravidelný n -úhelník. Jinak je hranol *nepravidelný*.

Hranol, jehož podstavou je rovnoběžník se nazývá *rovnoběžnostěn*.

Rovnoběžnostěn, jehož stěny jsou kosočtverce se nazývá *klenec*.

Kolmý hranol, jehož podstava je obdélník se nazývá *kvádr*. Kvádr, jehož stěny jsou čtverce se nazývá *krychle*.

Definice (Řez plochy / tělesa rovinou)

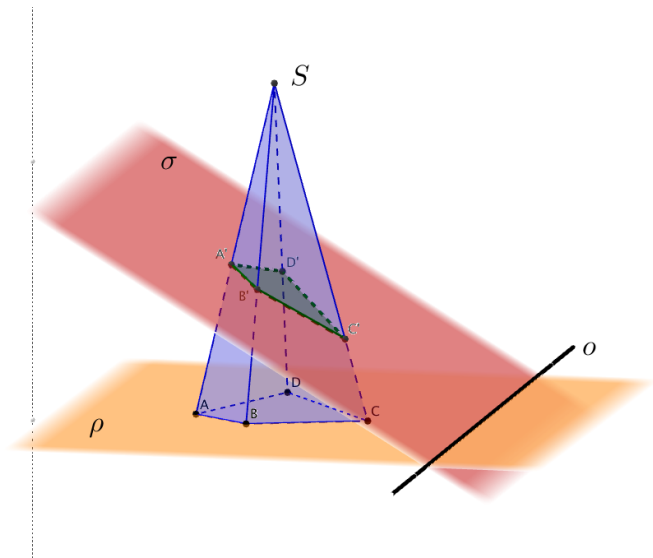
Řez plochy / tělesa rovinou σ je průnik plochy / tělesa a roviny σ .

K zobrazení řezu jehlanu můžeme využít středovou kolineaci v rovině (papíru, tabule, obrazovky...) . Samotný prostorový řez je kolineace mezi dvěma rovinami v prostoru. U obou platí:

- Zobrazujeme rovinu podstavy (řídící mnohoúhelník) do roviny řezu (výsledný řez).
- Střed kolineace je vrchol jehlanové plochy.
- Osa kolineace je průsečnice roviny podstavy a roviny řezu.

Pozn.: Má-li jehlan nějaké další vlastnosti, můžeme je využít.

Řez jehlanu

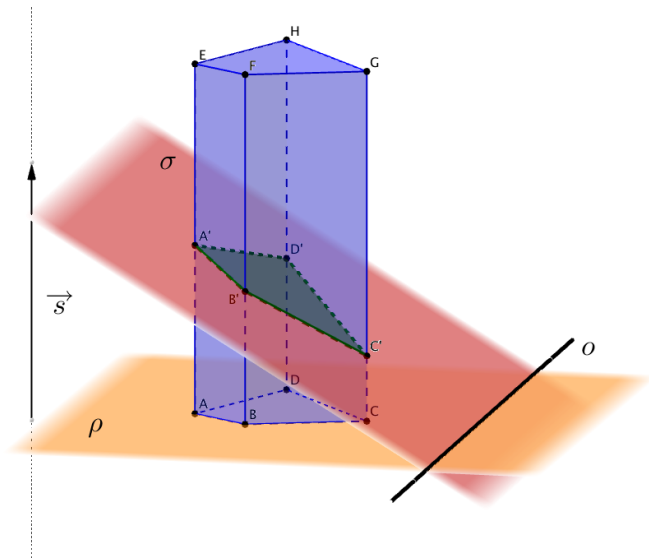


K zobrazení řezu hranolu můžeme využít osovou afinitu v rovině (papíru, tabule, obrazovky...) . Samotný prostorový řez je afinita mezi dvěma rovinami v prostoru. U obou platí:

- Zobrazujeme rovinu podstavy (řídící mnohoúhelník) do roviny řezu (výsledný řez).
- Směr afinity je řídící směr hranolové plochy.
- Osa afinity je průsečnice roviny podstavy a roviny řezu.

Pozn.: Má-li hranol nějaké další vlastnosti, můžeme je využít. Např: Řezy dvou rovnoběžných stěn rovinou jsou rovnoběžné.

Řez hranolu

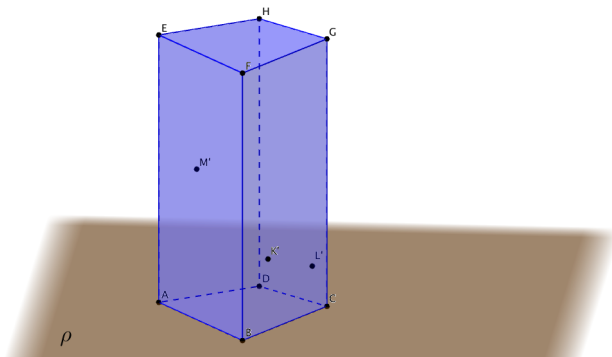


Řez hranolu

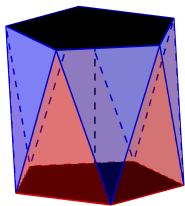
Příklad (Sestrojte řez kolmého hranolu rovinou procházející body K', L', M' ; $K' \in BCGF$, $L' \in CDHG$, $M' \in DAEH$)

Řešení - viz soubor na webu. Dohledáme samodružné body afinity, pak osu afinity a zobrazíme podstavní vrcholy v afinitě.

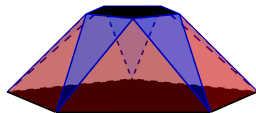
Sestrojte řez hranolu rovinou procházející body K', L', M'
 $K' \in BCGF, L' \in CDHG, M' \in DAEH$



Antijehlan a antihranol



antihranol



antijehlan

Obsah, povrch a objem

Definice (Obsah)

Obsah S rovinného útvaru je kladné číslo přiřazené útvaru tak, že platí:

- 1 shodné útvary mají stejný obsah
- 2 skláda-li se útvar z několika disjunktních útvarů, pak je jeho obsah součtem obsahů těchto útvarů
- 3 obsah čtverce o straně $1j$ ($cm, mm, \dots$) je $1j^2$ ($cm^2, mm^2, \dots$)

Definice (Povrch)

Povrch S tělesa je obsah plochy ohraničující těleso.

Definice (Objem)

Objem V prostorového útvaru je kladné číslo přiřazené útvaru tak, že platí:

- 1 shodné útvary mají stejný objem
- 2 skláda-li se útvar z několika disjunktních útvarů, pak je jeho objem součtem objemů těchto útvarů
- 3 objem krychle o straně $1j$ ($cm, mm, \dots$) je $1j^3$ ($cm^3, mm^3, \dots$)

Věta (Cavalieriho princip)

Nechť tělesa T_1 a T_2 leží mezi dvěma rovnoběžnými rovinami ρ_1 a ρ_2 , označme ρ každou rovnoběžnou rovinu $\rho \parallel \rho_1$ ležící mezi ρ_1 a ρ_2 .

Protíná-li rovina ρ tělesa T_1 a T_2 ve dvou útvarech o obsazích S_1 a S_2 , pak platí:

- Jestliže pro každou takovou rovinu ρ je $S_1 = S_2$, mají tělesa T_1 a T_2 stejný objem.*
- Jestliže pro každou takovou rovinu ρ je $S_1 = k \cdot S_2$, kde k je konstanta, je objem tělesa T_1 k -násobkem objemu tělesa T_2 .*

Povrch a objem hranolu a jehlanu

Nechť v - výška, S_p - obsah podstavy, S_{pl} - obsah pláště
Viz soubor cavalieriho princip.

Hranol

- Povrch hranolu: $S = 2S_p + S_{pl}$
- Objem hranolu: $V = S_p \cdot v$ - odvození pro kosý hranol - cavalieriho princip

Jehlan

- Povrch jehlanu: $S = S_p + S_{pl}$
- Objem jehlanu: $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$ - odvození naskládáním do hranolu
- Povrch komolého jehlanu: $S = S_{p_1} + S_{p_2} + S_{pl}$
- Objem komolého jehlanu: $V = \frac{1}{3} (S_{p_1} + \sqrt{S_{p_1} S_{p_2}} + S_{p_2}) \cdot v$

Kuželový prostor a plocha, kužel

Definice (Kuželový prostor / kuželová plocha)

Množina všech přímek procházejících daným bodem V a protínajících kruh / kružnici k , který / která leží v rovině ρ neprocházející bodem V , se nazývá *(kruhový) kuželový prostor / kuželová plocha*.

V - *vrchol* KPr resp. KPl

kružnice k - *řídící kružnice* KPr resp. KPl

přímky plochy procházející vrcholem a řídící kružnici -
povrchová přímka (površka) KPr resp. KPl

Kuželový prostor a plocha, kužel

Definice (Kuželový prostor / kuželová plocha)

Přímka, která prochází vrcholem kuželové plochy se nazývá *vrcholová přímka*.

Rovina, která prochází vrcholem kuželové plochy se nazývá *vrcholová rovina*.

Definice (Kužel)

Kužel je průnik kuželového prostoru a prostorové vrstvy určené rovinou ρ řídící kružnice a vrcholovou rovinou $\rho' \parallel \rho$.

Vzdálenost vrcholu od roviny podstavy - *výška* kuželu.

Kuželová plocha je rozvinutelná plocha, t.j. množinu všech površek lze rozvinout do roviny - povrchové úsečky pak tvoří *plášť* kuželu.

Sjednocení pláště a podstavy - *síť* kuželu.

Kuželový prostor a plocha, kužel

Definice (Kužel)

Kužel se nazývá *kolmý*, leží-li vrchol V na kolmici k rovině podstavy vztyčené v středu podstavy S . $\overline{SV}$ je *osa* kuželu. Jinak je kužel *kosý*.

Kužel se nazývá *rovnostranný*, je-li kolmý a osový řez je rovnostranný trojúhelník.

Nechť rovina σ protíná povrchy a je rovnoběžná s rovinou podstavy kuželu. Průnik kuželu a prostorové vrstvy určené rovinami ρ a σ se nazývá *komolý kužel*.

Nechť jsou dány dvě různoběžné přímky, které nejsou vzájemně kolmé. Rotací jedné přímky (tvořící) kolem druhé (osy) vznikne *rotační kuželová plocha*, z ní pak dle definice *rotační kužel*.

Definice (Kužel)

*Obecnou kuželovou plochu lze definovat nad libovolnou křivkou neprocházející vrcholem. Je-li křivka uzavřená, můžeme analogicky definovat *obecný kužel*. Např. eliptický, parabolický, hyperbolický kužel*

Válcový prostor a plocha, válec

Definice (Válcový prostor / válcová plocha)

Množina všech přímek směru $\vec{s}$ protínajících kruh / kružnici k , který / která leží v rovině ρ různoběžné se směrem $\vec{s}$, se nazývá *(kruhový) válcový prostor / válcová plocha*.

$\vec{s}$ - *řídící (vrcholový) směr* VPr resp. VPl

kružnice k - *řídící kružnice* VPr resp. VPl

přímky plochy procházející řídící kružnicí - *povrchové přímky (površky)* VPr resp. VPl

Válcový prostor a plocha, válecl

Definice (Válcový prostor / válcová plocha)

Přímka, která je rovnoběžná s řídícím směrem válcové plochy se nazývá *směrová přímka*.

Rovina, která je rovnoběžná s řídícím směrem válcové plochy se nazývá *směrová rovina*.

Definice (Válec)

Válec je průnik válcového prostoru a prostorové vrstvy určené rovinou ρ řídící kružnice a rovinou $\rho' \parallel \rho$; $\rho' \neq \rho$.

Vzdálenost rovin podstav - *výška válcu*.

Válcová plocha je rozvinutelná plocha, t.j. množinu všech površek lze rozvinout do roviny - povrchové úsečky pak tvoří *plášť válce*.

Sjednocení pláště a podstav - *síť válce*.

Válcový prostor a plocha, válecl

Definice (Válec)

Válec se nazývá *kolmý*, je-li řídící směr kolmý k rovině podstavy. $\overline{SV}$, kde S je střed podstavní kružnice je *osa válce*. Jinak je válec *kosý*.

Válec se nazývá *rovnostranný*, je-li kolmý a osový řez je čtverec.

Necht' jsou dány dvě rovnoběžné přímky. Rotací jedné přímky (tvořící) kolem druhé (osy) vznikne *rotační válcová plocha*, z ní pak dle definice *rotační válec*.

Obecnou válcovou plochu lze definovat nad libovolnou křivkou neležící v rovině rovnoběžné s řídícím směrem. Je-li křivka uzavřená, můžeme analogicky definovat *obecný válec*. Např. eliptický, parabolický, hyperbolický válec

Povrch a objem válcu a kuželu

Necht' v - výška, s - délka povrchy kuželu, S_p - obsah podstavy, S_{pl} - obsah pláště

Vzorce odvodíme „analogicky“ jako u hranolu a jehlanu.

Analogií se myslí limitní proces přechodu mnohoúhelníku do plochy omezené řídicí křivkou. Podraz je v tom, že by se nám nemuselo podařit rozumně naskládat tři kuželové plochy do válcové plochy.

Válec

- Povrch obecného válce: $S = 2S_p + S_{pl}$
- Povrch rotačního válce: $S = 2\pi r(r + v)$
- Objem obecného válce: $V = S_p \cdot v$
- Objem rotačního válce: $V = \pi r^2 \cdot v$

Povrch a objem válcu a kuželu

Kužel

- Povrch obecného kuželu: $S = S_p + S_{pl}$
- Povrch rotačního kuželu: $S = \pi r(r + s)$
- Objem obecného kuželu: $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$
- Objem rotačního kuželu: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot v$

Komolý kužel

- Povrch obecného komolého kuželu: $S = S_{p_1} + S_{p_2} + S_{pl}$
- Povrch rotačního komolého kuželu: $S = \pi(r_1^2 + r_2^2 + s(r_1 + r_2))$
- Objem obecného komolého kuželu:
 $V = \frac{1}{3} (S_{p_1} + \sqrt{S_{p_1} S_{p_2}} + S_{p_2}) \cdot v$
- Objem rotačního komolého kuželu: $V = \frac{1}{3} \pi(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \cdot v$

Definice (Kulová plocha (sféra))

Kulová plocha je množina všech bodů, které mají od bodu S vzdálenost r .

Definice (Koule)

Koule je množina všech bodů, které mají od bodu S vzdálenost nejvýše r .

Pozn. nebo část prostoru omezeného kulovou plochou.

Povrch a objem koule

r - poloměr koule

Koule

- Povrch koule: $S = 4\pi r^2$
- Objem koule: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Kulový vrchlík / úseč / výseč: r_1 - poloměr podstavy úseče, v - výška úseče

- Obsah kulového vrchlíku: $S = 2\pi r \cdot v$
- Objem kulové úseče: $V = \frac{1}{6}\pi(3r_1^2 + v^2) \cdot v$
- Objem kulové výseče: $V = \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot v$

Kulový pás / vrstva: r_1, r_2 - poloměry podstav, v - výška pásu

- Obsah kulového pásu: $S = 2\pi r \cdot v$
- Objem kulové vrstvy: $V = \frac{1}{6}\pi(3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2) \cdot v$