Riešenie záverečného testu Varianta C, LS 2014/2015

UPOZORNENIE: Priložené bodovanie sa vzťahuje na moje skupiny študentov, bodovanie jednotlivých cvičiacich sa môže a bude mierne líšiť.
V prípade, že odhalíte chybu/preklep (aj s odstupom), napíšte mi to prosím do mailu, môže to zachrániť zdravie iných.

1. (6b) Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7\cdot 2^{3n} - \frac{1}{9^n} + 2\cdot(\frac{7}{2})^{2n}}{5\cdot 4^n - 4\cdot(3,5)^{2n} + (\frac{1}{2})^{4n}}.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{7\cdot 8^n - \frac{1}{9^n} + 2\cdot(\frac{49}{4})^n}{5\cdot 4^n - 4\cdot(\frac{49}{4})^n + (\frac{1}{16})^n} \qquad \text{(2b)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{49}{4})^n(2+\dots)}{(\frac{49}{4})^n(-4+\dots)} \qquad \text{(2b)}$$

$$= -\frac{1}{2} \qquad \text{(2b)}$$

2. (20b) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \ln(e + x^3),$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/ záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitýh bodech), limity v krajních bodech Df , derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body, nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

Z ln plynie $e + x^3 > 0$ a odtiaľ $x > -\sqrt[3]{e} \Rightarrow D_f = (-\sqrt[3]{e}, \infty)$ (1b)

$f(-x) \neq \pm f(x)$ a funkce nie je ani sudá ani lichá. Plynie aj z D_f. (1b)

$P_x : f(x) = 0 \Leftrightarrow e + x^3 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1-e}$, t.j. $P_x = [\sqrt[3]{1-e}, 0]$ (0,5b)
$P_y : x = 0 \Rightarrow \ln e = 1$, t.j. $P_y = [0, 1]$ (0,5b)

znamienko funkcie: funkcia je na $(-\sqrt[3]{e}, \sqrt[3]{1-e})$ záporná, na $(\sqrt[3]{1-e}, \infty)$ kladná (0,5b)

$\lim\limits_{x \to (-\sqrt[3]{e})^+} \ln(e + x^3) = -\infty$ (1,5b)

$\lim\limits_{x \to \infty} \ln(e + x^3) = \infty$ (1b)

$f'(x) = \dfrac{3x^2}{(e + x^3)}; x \neq -\sqrt[3]{e} \Rightarrow f'$ je definovaná na celom D_f (2b)

nulové body derivácie: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (0,5b)

monotónnosť funkcie: $f'(x) > 0$ vždy a funkcia je rastúca (1b)

monotónnosť sa nemení a extrémy teda neexistujú (0,5b)

$f''(x) = -\dfrac{3x(x^3 - 2e)}{(x^3 + e)^2}; x \neq -\sqrt[3]{e}; f''$ je definovaná na celom D_f (2b)

nulové body 2. derivácie $x = 0 \vee x = \sqrt[3]{2e}$ (0,5b)

konvexita/ konkavita: $f''(x) < 0$ na $(-\sqrt[3]{e}, 0)$ a $(\sqrt[3]{2e}, \infty)$ a funkcia je konkávna, $f'' > 0$ na $(0, \sqrt[3]{2e})$ a funkcia je tu konvexná (1b)

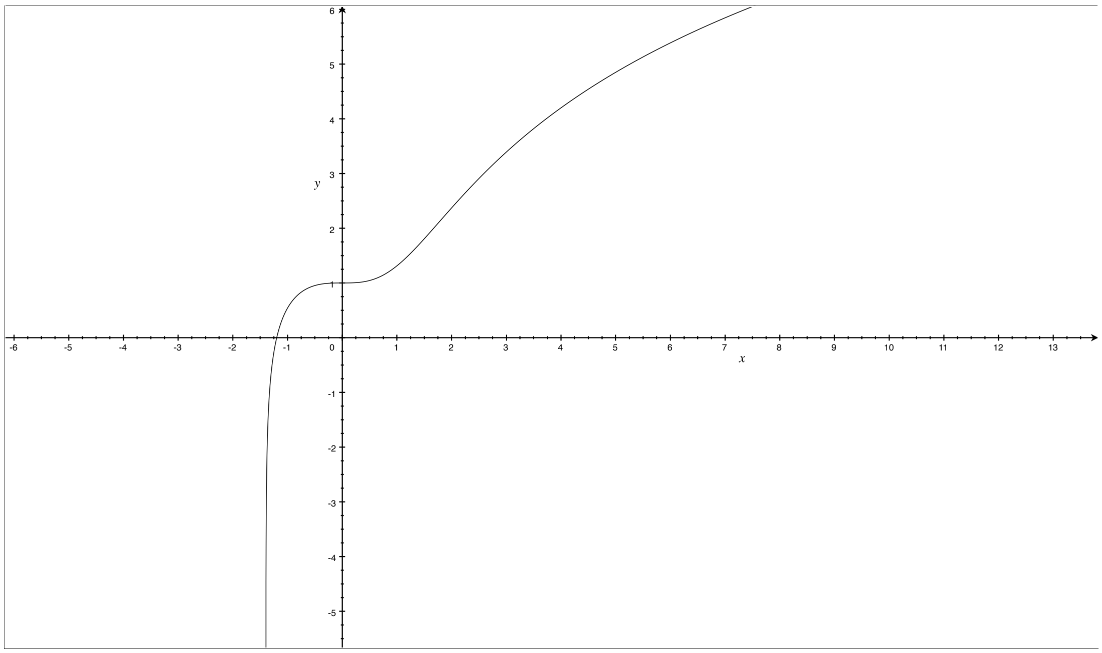
inflexné body funkcie sú $[0, 1]$ a $[\sqrt[3]{2e}, 1 + \ln 3]$ (0,5b)

asymptoty $y = kx + q : k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(e + x^3)}{x} =$ L'H $\frac{\infty}{\infty}$

$$= \frac{3x^2}{(e+x^3)} = 0 = k$$

$$q = \lim_{x\to\infty} ln(e+x^3) = \infty \text{ asymptota neexistuje} \qquad (3b)$$

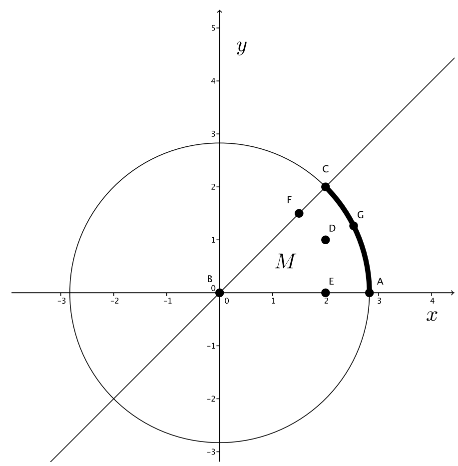
graf: (3b)



3. (16b) Určete extrémy funkce $f(x,y)=(x-2)^2+(y-1)^2$ na množině $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 8; 0\le y\le x\}$.
Nakreslete zadanou množinu i všechny nalezené kandidáty na extrém.

Obrázok so všetkými kandidátmi:
kružnica + A, C (1,5b)
jednotlivé priamky + B (1b)
D, E, F, G (1b)

Vrcholy: priesečník priamok $y=0, y=x$ je bod $B[0,0]$ (0,5b)
priesečníky kružnice a priamok:
$x^2+y^2=8$ a $y=0$ - dosadením: Riešením je bod $A[2\sqrt{2},0]$ (1b)
$x^2+y^2=8$ a $y=x$ - dosadením: Riešením je bod $C[2,2]$ (druhý priesečník nepatrí množine) (1b)
Stacionárne body: $\partial_x f=2x-4; \partial_y f=2y-2$
$D=[2,1]$ (2b)



Viazané extrémy:
Úsečky (dosadením):
$AB : x\in(0,2\sqrt{2}), y=0$
$f(x,0)=g(x)=(x-2)^2+1$
$g'=2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$ je extrém, kandidát $E[2,0]$ (1,5b)

$BC : x\in(0,2), y=x$
$f(x,x)=g(x)=(x-2)^2+(x-1)^2=2x^2-6x+5$
$g'=4x-6=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ je extrém, kandidát $F[\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$ (1,5b)

Časť kružnice AC (napr. Jacobián): $|\mathbf{J}|=-8y+4x, |\mathbf{J}|=0 \Leftrightarrow x=2y$)
dosadením do $x^2+y^2=8$ dostávame $5y^2=8 \Leftrightarrow y=\pm 2\sqrt{\frac{2}{5}}$
$y=2\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow G[4\sqrt{\frac{2}{5}},2\sqrt{\frac{2}{5}}], y=-2\sqrt{\frac{2}{5}}$ nepatrí M (3b)

Hodnoty $f(A)=13-8\sqrt{2}, f(B)=5, f(C)=1, f(D)=0, f(E)=1$,
$f(F)=\frac{1}{2}, f(G)=13-4\sqrt{10}$ (1,5b)
Maximum v bode $B[0,0]$,minimum v bode $D[2,1]$ (0,5b).

4. (18b) Určete extrémy funkce $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$ na množině dané vazbami:

$$g_1(x, y, z) = x + y - z$$

$$g_2(x, y, z) = x^2 + 2z^2 - 24.$$

Využijte metodu Lagrangeových multiplikátorů a vypočítejte hodnoty příslušných multiplikátorů.

Zadaný príklad je na Lagrangeove multiplikátory, preto je výpočet napr. pomocou Jacobiánu hodnotený za 0b.
$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 3x - y - 3z + \lambda_1(x + y - z) + \lambda_2(x^2 + 2z^2 - 24)$ (1b)

1) $\partial_x L = 3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0$
2) $\partial_y L = -1 + \lambda_1 = 0$
3) $\partial_z L = -3 - \lambda_1 + 4\lambda_2 z = 0$
4) $g_1(x, y, z) = x + y - z = 0$
5) $g_2(x, y, z) = x^2 + 2z^2 - 24 = 0$ (5b)

Výpočet (optimálny, nazáleží ak ste došli k správnym záverom):
2)$\lambda_1 = 1 \to 1), 3) \Rightarrow 1) x = -\frac{2}{\lambda_2}, 3) z = \frac{1}{\lambda_2}$, kde $\lambda_2 \neq 0$, spätným dosadením zistíme, že λ_2 je vždy rôzne od nuly.
1)$x = -\frac{2}{\lambda_2}, 3) z = \frac{1}{\lambda_2} \to 5) \Rightarrow \lambda_2 = \pm\frac{1}{2}$, dopočítame x, z a dosadíme do 4), dopočítame y (10b)
2 kandidáti:
$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, A[-4, 6, 2]; f(A) = -24$, minimum
$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}, B[4, -6, -2]; f(B) = 24$, maximum (2b)