Riešenie záverečného testu Varianta D, LS 2014/2015

UPOZORNENIE: Priložené bodovanie sa vzťahuje na moje skupiny študentov, bodovanie jednotlivých cvičiacich sa môže a bude mierne líšiť.

V prípade, že odhalíte chybu/preklep (aj s odstupom), napíšte mi to prosím do mailu, môže to zachrániť zdravie iných.

1. (6b) Určete limitu posloupnosti

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^4 + 359n - 2} - n^2 + 6.$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^4 + 359n - 2} - n^2 + 6)\frac{\sqrt{n^4 + 359n - 2} + n^2 - 6}{\sqrt{n^4 + 359n - 2} + n^2 - 6} \qquad (2b)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{12n^2 + 359n - 38}{n^2\sqrt{1 + \frac{359}{n^3} - \frac{2}{n^4}} + n^2 - 6} \qquad (2b)$$

$$= \frac{12}{2} = 6 \qquad (2b)$$

2. (20b) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \log_2(-x^2 - 2x + 8),$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/ záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitých bodech), limity v krajních bodech Df , derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body, nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

Z log plynie $-x^2 - 2x + 8 > 0$ a odtiaľ $-4 < x < 2 \Rightarrow D_f = (-4, 2)$ (1b)

$f(-x) \neq \pm f(x)$ a funkce nie je ani sudá ani lichá. Plynie aj z D_f. (1b)

$P_x : f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2-2x+8 = 1 \Leftrightarrow x = -1\pm 2\sqrt{2}$, t.j. $P_{x1} = [-1-2\sqrt{2}, 0], P_{x2} = [-1 + 2\sqrt{2}, 0]$ (1b)
$P_y : x = 0 \Rightarrow \log_2 8 = 3$, t.j. $P_y = [0, 3]$ (0,5b)

znamienko funkcie: funkcia je na $(-4, -1 - 2\sqrt{2})$ a $(-1 + 2\sqrt{2}, 2)$ záporná, na $(-1 - 2\sqrt{2}, -1 + 2\sqrt{2})$ kladná (0,5b)

$\lim\limits_{x\to -4^+} \log_2(-x^2 - 2x + 8) = -\infty$ (1,5b)
$\lim\limits_{x\to 2^-} \log_2(-x^2 - 2x + 8) = -\infty$ (1,5b)
$f'(x) = \dfrac{2(x + 1)}{(x^2 + 2x - 8)\ln 2} = \dfrac{2(x + 1)}{(x + 4)(x - 2)\ln 2}; x \neq -4, 2 \Rightarrow f'$ je definovaná na celom D_f (2,5b)

nulové body derivácie: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (0,5b)

monotónnosť funkcie: $f'(x) > 0$ na $(-4, -1)$ a funkcia je tu rastúca, $f'(x) < 0$ na $(-1, 2)$ a funkcia je tu klesajúca (1b)

lokálne i globálne maximum funkcie je v bode $[-1, \log_2 9 = \frac{\ln 9}{\ln 2} \doteq 3,17]$ (0,5b)

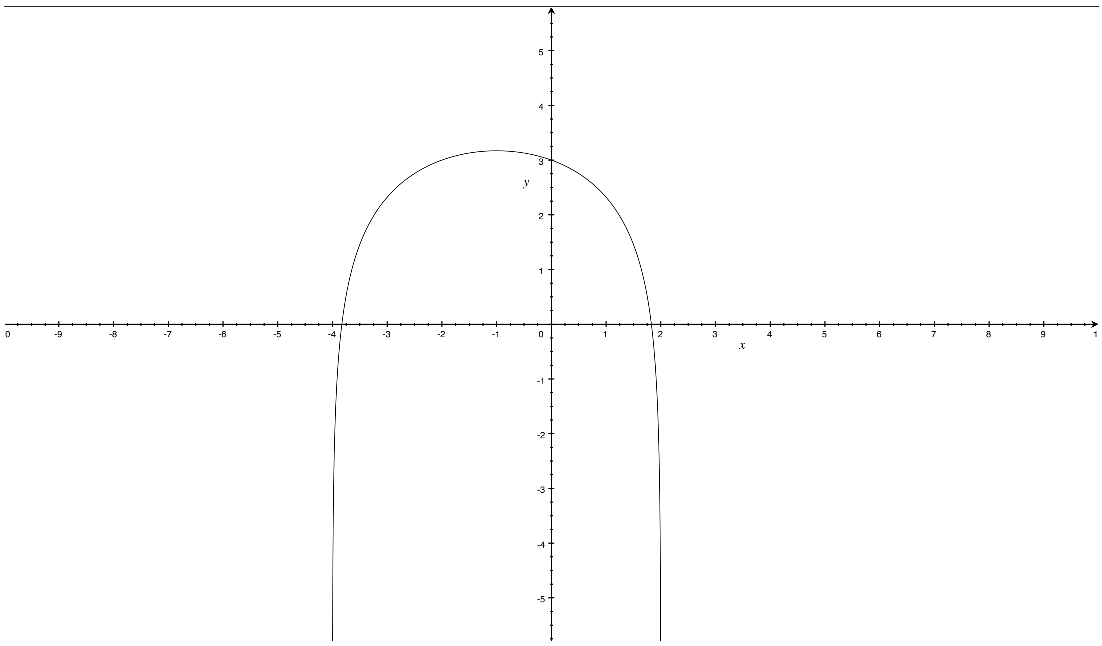
$f''(x) = -\dfrac{2(x^2 + 2x + 10)}{(x + 4)^2(x - 2)^2 \ln 2}; x \neq -4, 2; f''$ je definovaná na celom D_f (2,5b)

nulové body 2. derivácie neexistujú (kvadratický člen v čitateli nemá reálne korene) (0,5b)

konvexita/ konkavita: $f''(x) < 0$ vždy a funkcia je konkávna (1b) inflexné body funkcie neexistujú (0,5b)

asymptoty v $\pm\infty$ nemajú zmysel, keďže sme mimo D_f. (1b)

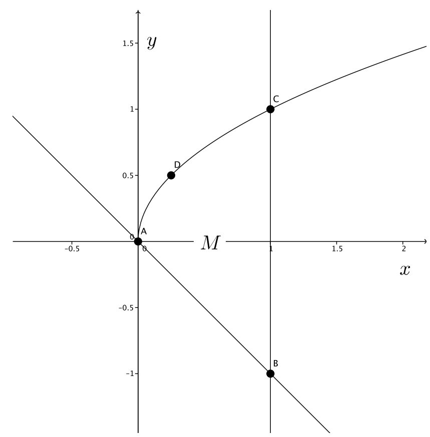
graf: (3b)



3. (16b) Určete extrémy funkce $f(x,y) = -x + y$ na množině
$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; -x \leq y \leq \sqrt{x}\}$.
Nakreslete zadanou množinu i všechny nalezené kandidáty na extrém.

Obrázok so všetkými kandidátmi:
odmocninová funkcia + A, C (2b)
jednotlivé priamky + B (1,5b)
D (0.5b)

Vrcholy: priesečník priamok $y = -x, x = 1$ je bod $B[1,-1]$ (0,5b)
priesečníky funkcie a priamok:
$y = \sqrt{x}$ a $x = 0$ - dosadením: Riešením je bod $A[0,0]$ (1b)
$y = \sqrt{x}$ a $x = 1$ - dosadením: Riešením je bod $C[1,1]$ (1b)
Stacionárne body: funkcia je v oboch zložkách lineárna, takže neexistujú, resp. z parciálnych derivácií (2b)



Viazané extrémy:
Úsečky AB, BC: funkcia je v oboch zložkách lineárna, takže extrémy neexistujú, prípadne dosadením (3b)

Časť odmocninovej funkcie AC (napr. dosadením):
$x \in (0,1), y = \sqrt{x}$
$f(x, \sqrt{x}) = g(x) = -x + \sqrt{x}$
$g'(x) = -1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ je extrém, t.j. kandidát $D[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ (3b)

Hodnoty $f(A) = 0, f(B) = -2, f(C) = 0, f(D) = \frac{1}{4}$ (1b)
Maximum v bode $D[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$,minimum v bode $B[1,-1]$ (0,5b).

4. (18b) Určete extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ na množině dané vazbami:

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$$

$$g_2(x,y,z) = x + y - z - 1.$$

Využijte metodu Lagrangeových multiplikátorů a vypočítejte hodnoty příslušných multiplikátorů.

Zadaný príklad je na Lagrangeove multiplikátory, preto je výpočet napr. pomocou Jacobiánu hodnotený za 0b.
$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x^2+y^2-1) + \lambda_2(x+y-z-1)$ (1b)

1) $\partial_x L = 2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0$

2) $\partial_y L = 2y + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0$

3) $\partial_z L = 2z - \lambda_2 = 0$

4) $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

5) $g_2(x,y,z) = x + y - z - 1 = 0$ (5b)

Výpočet (optimálny, nazáleží ak ste došli k správnym záverom):
$1), 2) x = -\frac{\lambda_2}{2(1+\lambda_1)}, y = -\frac{\lambda_2}{2(1+\lambda_1)}$ za podmienky, že $\lambda_1 \neq -1$
$3) z = \frac{\lambda_2}{2}$
Ak $\lambda_1 \neq -1$, dosadíme do $4) \Rightarrow \lambda_2 = \pm\sqrt{2}(1+\lambda_1) \to 5)$ a dopočítame
$\lambda_1 = -3 - \sqrt{2}, \lambda_2 = -2(1+\sqrt{2}), A[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1-\sqrt{2}]; f(A) = 4 + 2\sqrt{2}$
$\lambda_1 = -3 + \sqrt{2}, \lambda_2 = 2(-1+\sqrt{2}), B[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1+\sqrt{2}]; f(B) = 4 - 2\sqrt{2}$ (5b)

Ak $\lambda_1 = -1$, dosadíme do $1), 2) \Rightarrow \lambda_2 = 0 \to 3) \Rightarrow z = 0 \to 5) \Rightarrow$
$x = 1 - y \to 4) \Rightarrow x = 0, y = 1 \vee x = 1, y = 0$
$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, C[0,1,0]; f(C) = 1$ $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, D[1,0,0]; f(D) = 1$ (5b)

Maximum je v bode A, minimá v bodoch C, D (2b).