Riešenie záverečného testu Varianta C, LS 2015/2016

UPOZORNENIE: Priložené bodovanie sa vzťahuje na moje skupiny študentov, bodovanie jednotlivých cvičiacich sa môže a bude mierne líšiť.
V prípade, že odhalíte chybu/preklep (aj s odstupom), napíšte mi to prosím do mailu, môže to zachrániť zdravie iných.

1. (6b) Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{16n^4 + 51n^2 - 17n + 2} - 4n^2 - 6.$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{16n^4 + 51n^2 - 17n + 2} - (4n^2+6) \frac{\sqrt{16n^4 + 51n^2 - 17n + 2} + (4n^2+6)}{\sqrt{16n^4 + 51n^2 - 17n + 2} + (4n^2+6)} = \qquad (2b)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 17n - 34}{n^2(\sqrt{16 + \frac{51}{n^2} - \dots} + 4 + \frac{6}{n^2})} = \qquad (2b)$$

$$= \frac{3}{8} \qquad (2b)$$

Na začátku bylo možno podle pravidla o limitě rozdílu odloučit člen -6.

2. (18b) (a)Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 2},$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/ záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitýh bodech), limity v krajních bodech Df , derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body, nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

(b) Dále vypočítejte a do grafu nakreslete všechny tečny, které mají směrnici $k = 2$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ (0,5b)
Z D_f plyne, že funkce není ani sudá ani lichá (nebo ověřením). (0,5b)

$P_x : f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 5 \Rightarrow P_{x_1}[-1, 0], P_{x_1}[5, 0]$.
$P_y : x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{2} \Rightarrow P_y[0, \frac{5}{2}]$ (0,5b)
znamínko funkce: funkce je na $(-\infty, -1)$ a $(2, 5)$ záporná; na $(-1, 2)$ a $(5, \infty)$ je kladná (0,5b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 2} = \infty \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 2} = \frac{-9}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 2} = -\infty \text{ (1b)} \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 2} = \frac{-9}{0^-} = +\infty \text{ (1b)}$$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 13}{(x - 2)^2}$; f' je definována na celém D_f (2b)
nulové body derivace: $f'(x) = 0$ diskriminant D kvadratické funkce je $D = -36$
a nulový bod neexistuje (0,5b)
monotonie funkce: $f'(x) > 0$ na $(-\infty, 2)$ i $(2, \infty)$ a funkce je rostoucí na celým D_f (1b)
Lokální ani globální extrémy neexistují (0,5b)

$f''(x) = -\dfrac{18}{(x - 2)^3}$; f'' je definována na celém D_f (2b)
nulové body 2. derivace: $f'(x) = 0$ neexistují (0,5b)
konvexita/konkavita: $f''(x) > 0$ na $(-\infty, 2)$ a funkce je tady konvexní,
$f''(x) < 0$ na $(2, \infty)$ a funkce je tady konkávní (1b)
inflexní body neexistují (0,5b)

asymptoty $y = kx + q$ v $\pm\infty$:
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 4x - 5}{x(x - 2)} = 1 = k$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 2} - x = \frac{-2x - 2}{x - 2} = -2 = q$$
$y = x - 2$ je asymptota v $\pm\infty$ (1b)

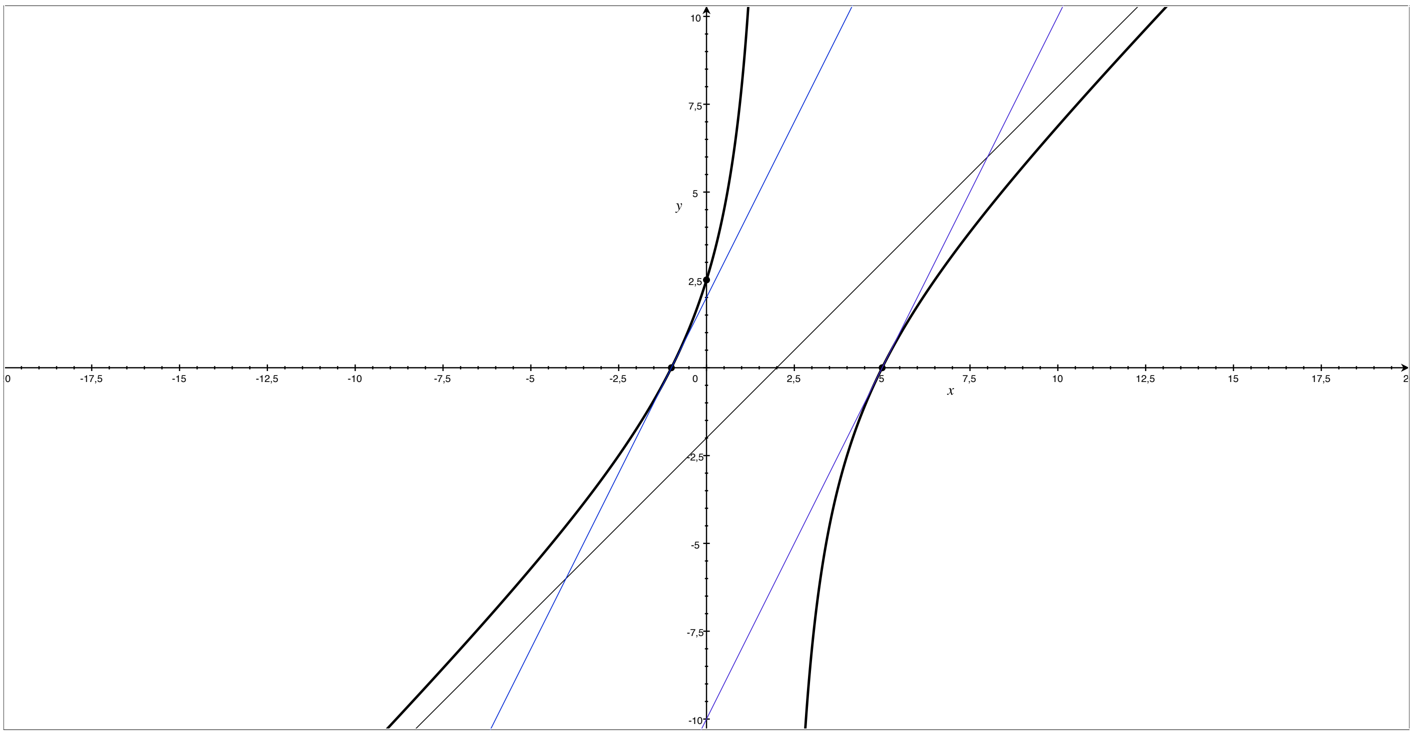
(b) tečna $y = kx + q; k = 2$:

$f'(x) = k = 2 = \dfrac{x^2 - 4x + 13}{(x-2)^2}$

$x_1 = -1, x_2 = 5$ to jsou P_x

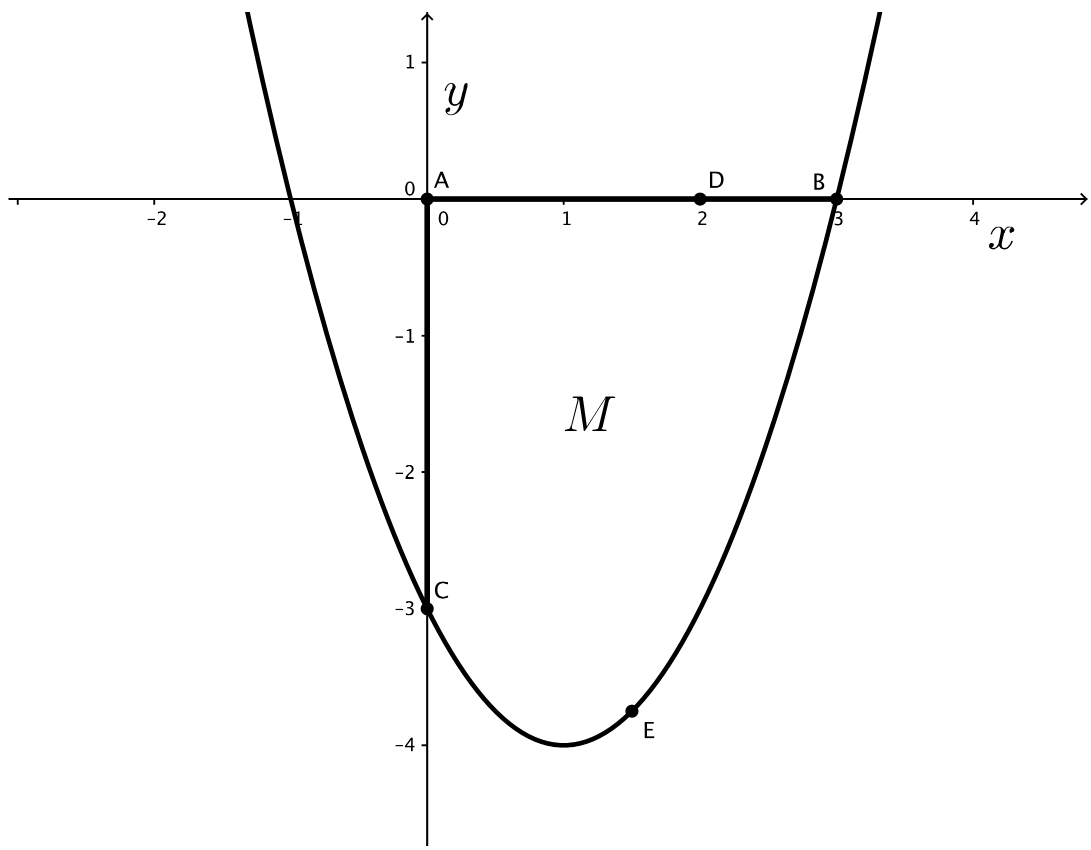
dopočítame q a máme $y = 2x + 2; y = 2x - 10$ (2b)

graf: (3b)



3. (18b) Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = (x-2)^2 + y + 1$
na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y - (x-1)^2 + 4 \geq 0, x \geq 0, y \leq 0\}$
Zadanou množinu M nakreslete a vyznačte v ní všechny nalezené kandidáty.

Obrázek s kandidátmi (3b)



Vrcholy:
průsečíky paraboly $y = (x-1)^2 - 4$ a $x = 0$ - dosazením:
Řešením je bod $C[0,-3]$ (1b)
průsečíky paraboly $y = (x-1)^2 - 4$ a $y = 0$ - dosazením:
Řešením je pro $x \geq 0$ bod $B[3,0]$ (1b)
$x = 0$ a $y = 0$ - dosazením:
Řešením je bod $A[0,0]$ (1b)

Stacionární body:
$\partial_x f = 2x - 4 = 0$

$\partial_y f = 1 \neq 0$
Stacionární body nemá (2b)

Vázané extrémy:
Úsečka $\overline{AB}$
$x \in (0,3), y = 0$
$f(x,0) = g(x) = x^2 - 4x - 3$
$g'(x) = 2x - 4$
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ kandidát $D[2,0]$ (2,5b)

Úsečka $\overline{AC}$
$x = 0, y \in (-3,0)$
$f(0,y) = g(y) = y + 5$
$g'(y) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ žádný kandidát (2,5b)

Část paraboly $\overline{BC}$
$x \in (0,3), y = (x-1)^2 - 4$
$f(x,(x-1)^2 - 4) = g(x) = (x-2)^2 + (x-1)^2 - 4 + 1 = 2x^2 - 6x + 2$
$g'(x) = 4x - 6$
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ kandidát $E[\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}]$ (3b)

Hodnoty $f(A) = 5; f(B) = 2; f(C) = 2; f(D) = 1; f(E) = -\frac{5}{2}$
Maximum v bode $A[0,0]$,minimum v bode $E[\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}]$ (2b)

4. (18b) Určete globální extrémy funkce $f(x, y, z) = e^{yz} + 5$
na množině $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ 12x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0\}$

Výpočet pomocí Lagrangeovych multiplikátorů:
$L(x, y, z, \lambda) = e^{yz} + 5 + \frac{1}{4} + \lambda(12x^2 + y^2 + z^2 - 2)$
$(1)\partial_x L = 24x\lambda = 0$
$(2)\partial_y f = ze^{yz} + 2y\lambda = 0$
$(3)\partial_z f = ye^{yz} + 2z\lambda = 0$
$(4)\partial_\lambda f = 12x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$ (5b)

Výpočet (určitě ne jediný)
z (1) máme $x = 0(*) \vee \lambda = 0(**)$
(**) pro $\lambda = 0$ dosadíme do $(2, 3)$ a dostávame $y = 0, z = 0$ ze (4) dostáváme $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$
(*) $\lambda \neq 0$, z (2) máme $\lambda = \frac{-ze^{yz}}{2y}, y \neq 0$ a z (3) máme $\lambda = \frac{-ye^{yz}}{2z}, z \neq 0$
porovnáním $\frac{-ze^{yz}}{2y} = \frac{-ye^{yz}}{2z}$ dostávame $z^2 = y^2$ (používáme $e^{xy} \neq 0$)
dosadíme $x = 0, y^2 = z^2$ do (4) a $y = \pm 1$
ověříme ještě v (*) $y = 0 \vee z = 0$, $x = y = z = 0$ nebo $x = y = 0$ máme z $(3), z = 0$ a stejně pro $x = z = 0$, nic z toho nesplňuje (4). (10b)
$A[0, 1, -1], \lambda = \frac{1}{2e}, f(A) = f(B) = \frac{1}{e} + 5$
$B[0, -1, 1], \lambda = \frac{1}{2e}$
$C[0, 1, 1], \lambda = -\frac{e}{2}, f(C) = f(D) = e + 5$
$D[0, -1, -1], \lambda = -\frac{e}{2}$
$E[\frac{\sqrt{6}}{6}, 0, 0], \lambda = 0, f(E) = f(F) = 6$
$F[-\frac{\sqrt{6}}{6}, 0, 0], \lambda = 0$

(2b)
Maximum je v bodoch C, D, minimum je v bodoch A, B. (1b)