Riešenie záverečného testu Varianta D, LS 2015/2016

UPOZORNENIE: Priložené bodovanie sa vzťahuje na moje skupiny študentov, bodovanie jednotlivých cvičiacich sa môže a bude mierne líšiť.
V prípade, že odhalíte chybu/preklep (aj s odstupom), napíšte mi to prosím do mailu, môže to zachrániť zdravie iných.

1. (6b) Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n\left(n\sqrt{2}+3\right)^2-(2n-1)^3}{n\sqrt{n^2+5n-3}}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2((24\sqrt{2}+12)+\frac{30}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2\sqrt{1+\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}}} = \qquad \text{(4b)}$$

$$= 12(1+2\sqrt{2}) \qquad \text{(2b)}$$

---

2. (18b) (a)Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt{x^2-5x+4}-2,$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/ záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitýh bodech), limity v krajních bodech Df , derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body, nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

(b) Dále vypočítejte a do grafu nakreslete tečny ve všech průsečících grafu s osou x.
Pomůcka: $\sqrt{2} \doteq 1{,}41$, $\sqrt{7} \doteq 2{,}65$, $\sqrt{10} \doteq 3{,}16$.

Z odmocniny máme $D_f = (-\infty, 1\rangle \cup \langle 4, \infty)$ (0,5b)
Z D_f plyne, že funkce není ani sudá ani lichá (nebo ověřením). (0,5b)

$P_x : f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-5x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = 5$ a tedy $P_{x_1}[0,0], P_{x_2}[5,0]$
$P_y = P_{x_1}$ (0,5b)
znamínko funkce: funkce je na $(-\infty, 0)$ a $(5, \infty)$ kladná; na $(0, 1\rangle$ a $\langle 4, 5)$ je záporná (0,5b)

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-5x+4}-2 = \infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \sqrt{x^2-5x+4}-2 = -2 \text{ (dosazením)}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-5x+4}-2 = \infty \text{ (1b)} \qquad \lim_{x\to 4^+} \sqrt{x^2-5x+4}-2 = -2 \qquad \text{(1b)}$$

$$f'(x) = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+4}}; f' \text{ je definována na } (-\infty, 1) \cup (4, \infty) \qquad \text{(2b)}$$

nulové body derivace: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$, neleží v D_f, tudíž nulové body neexistují (0,5b) monotonie funkce: $f'(x) > 0$ na $(4, \infty)$ a funkce je tady rostoucí, $f'(x) < 0$ na $(-\infty, 1)$ a funkce je tady klesající (0,5b)

Globální minimum je v bodech $[1, -2]; [4, -2]$ (0,5b)

$f''(x) = -\dfrac{9}{4(x^2 - 5x + 4)^{\frac{3}{2}}}$; f'' je definována na $(-\infty, 1) \cup (4, \infty)$ (2b)

nulové body 2. derivace: $f'(x) = 0$ neexistují (0,5b)

konvexita/konkavita: $f''(x) < 0$ na $(-\infty, 1) \cup (4, \infty)$ a funkce je tady konkávní (0,5b)

inflexní body neexistují (0,5b)

asymptoty $y = kx + q$ v $\pm\infty$:

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 4} - 2}{x} = 1 = k_1$

$\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - 5x + 4} - 2 - x = -\dfrac{9}{2} = q_1$

asymptota v $+\infty : y = x - \frac{-9}{2}$

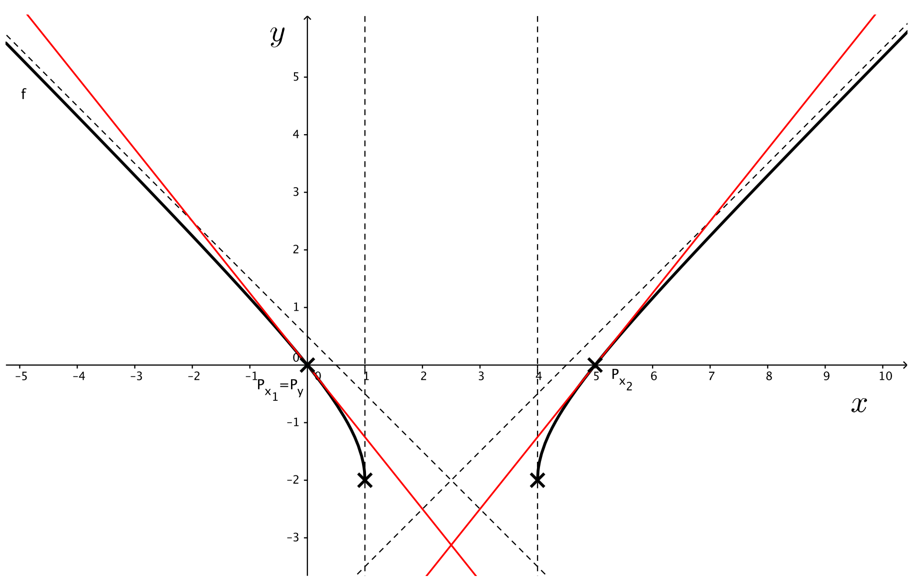
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 4} - 2}{x} = -1 = k_2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 5x + 4} - 2 + x = \dfrac{1}{2} = q_2$

asymptota v $-\infty : y = -x + \frac{1}{2}$ (2b)

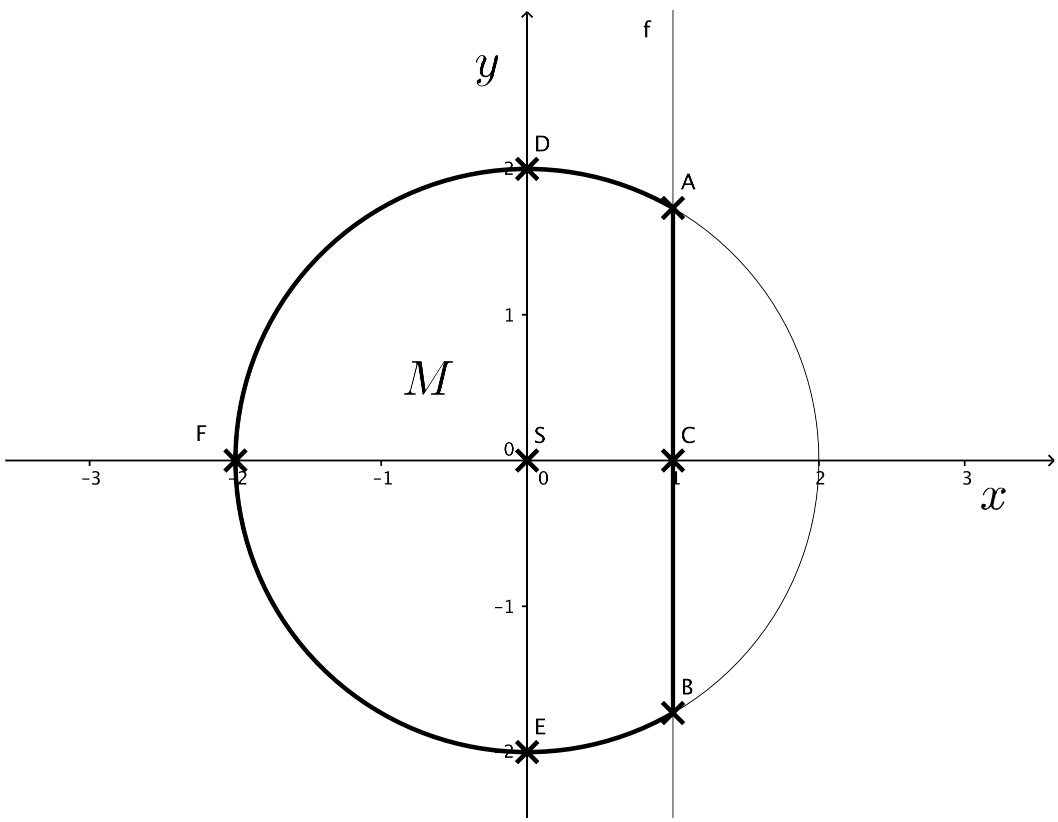
(b) tečna $y = kx + q; P_{x_1} = [0, 0], P_{x_2} = [5, 0]$: $\begin{array}{ll} f'(0) = -\frac{5}{4} & f'(5) = \frac{5}{4} \\ 0 = (-\frac{5}{4}) \cdot 0 + q_1 & 0 = (\frac{5}{4}) \cdot 5 + q_2 \\ q_1 = 0 & q_2 = -\frac{25}{4} \\ t_1 : y = -\frac{5}{4}x & t_2 : y = \frac{5}{4}x - \frac{25}{4} \end{array}$ (2b)

graf: (3b)



3. (18b) Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = e^{(5x^2+y^2-4)}$
na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4, x \leq 1\}$
Zadanou množinu M nakreslete a vyznačte v ní všechny nalezené kandidáty.
Pomůcka: $e \doteq 2{,}72, e^4 \doteq 54{,}6, e^{16} \doteq 8886110$.

Obrázek s kandidátmi (3b)



Vrcholy:
průsečíky kružnice $x^2+y^2=4$ a přímky $x=1$ - dosazením:
Řešením jsou body $A[1,\sqrt{3}], B[1,-\sqrt{3}]$ (2b)
Stacionární body:
$\partial_x f = 10xe^{(5x^2+y^2-4)} = 0$
$\partial_y f = 2ye^{(5x^2+y^2-4)} = 0$
Stacionární bod S[0,0] (3b)

Vázané extrémy:
Úsečka $\overline{AB}$
$x = 1, y \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
$f(1, y) = g(y) = e^{(1+y^2)}$
$g'(y) = 2ye^{(1+y^2)}$
$g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ kandidát $C[1, 0]$ (3b)

Část kružnice AB (např. Jacobián)
$x \in \langle -2, 1)$
$(1) g = x^2 + y^2 - 4 = 0$
$(2) \det \mathcal{J} = \det \begin{pmatrix} 10xe^{(5x^2+y^2-4)} & 2ye^{(5x^2+y^2-4)} \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = 16xye^{(5x^2+y^2-4)} = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$
$x = 0$ dosadíme do (1) a máme $y = \pm 2$, t.j. $D[0, 2], E[0, -2]$
$y = 0$ dosadíme do (1) a máme $x = -2$, t.j. $F[-2, 0]$ (4b)

Hodnoty $f(A) = f(B) = e^4; f(C) = e; f(D) = f(E) = 1, f(F) = e^{16}, f(S) = e^{-4}$
Maximum v bode $F[-2, 0]$,minimum v bode $S[0, 0]$ (3b)

---

4. (18b) Určete globální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2$
na množině $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ g_1(x, y, z) = x^2 + y - z^2 = 0;\ g_2(x, y, z) = x^2 + z^2 - 4 = 0\}$

Výpočet pomocí Jacobiánu:
$(1) g_1(x, y, z) = x^2 + y - z^2 = 0$ $(2) g_2(x, y, z) = x^2 + z^2 - 4 = 0$ $(3) \det \mathcal{J} = \det \begin{pmatrix} 2x & -4y & 2z \\ 2x & 1 & -2z \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix} =$(6b)
$= 32xyz = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0 \vee z = 0)$ (1b)
Dosazujeme postupně:
Ak $x = 0$, z (2) je $z = \pm 2$ a z (1) je $y = 4$, máme $A[0, 4, 2], B[0, 4, -2]$
(LM by byli $\lambda_1 = 16, \lambda_2 = 15$) (3b)

Ak $y = 0$, z (1) je $x^2 = z^2$ a po dosazení do (2) máme $x^2 = 2$, t.j. $C[-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}], D[-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}]$
$E[\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}], F[\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}]$ (LM by byli $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$) (3b)

Ak $z = 0$, z (2) je $x = \pm 2$ a z (1) je $y = -4$, máme $G[2, -4, 0], H[-2, -4, 0]$
(LM by byli $\lambda_1 = -16, \lambda_2 = 15$) (3b)

$f(A) = f(B) = f(G) = f(H) = -28; f(C) = f(D) = f(E) = f(F) = 4$
Maximum je v bodech C, D, E, F, minimum je v bodech A, B, G, H (2b)