Řešení záverěčného testu Varianta D, ZS 2016/2017

UPOZORNENÍ: Přiložené bodování se vztahuje na moje skupiny studentů, bodování jednotlivých cvičících se může a bude mírně lišit.
V případě, že odhalíte chybu/překlep (i s odstupem), napište mi to, prosím, do mailu, může to zachránit zdraví jiných.

1. (6b) Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+n^3}-n^2}{n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^3-n^4}{n(\sqrt{n^4+n^3}+n^2)} = \qquad (2b)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)} = \qquad (2b)$$

$$= \frac{1}{2} \qquad (2b)$$

---

2. (18b) (a)Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}},$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/ záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitýh bodech), limity v krajních bodech D_f , derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body, nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

Pomůcka: $e^{-3} \doteq 0{,}05, e^{-2} \doteq 0{,}14, e^{-1} \doteq 0{,}37, e \doteq 2{,}72, e^2 \doteq 7{,}39, e^3 \doteq 20{,}1$

Z podílu máme $D_f = \mathbb{R} \setminus 1$ (0,5b)
Z D_f plyne, že funkce není ani sudá ani lichá (nebo ověřením). (0,5b)

$P_x : f(x) \neq 0 \Rightarrow$ neexistuje
$P_y : x = 0 \Rightarrow P_y = [0, e]$ (0,5b)
znamínko funkce: funkce je na D_f kladná (0,5b)

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1+x}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \qquad \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1+x}{1-x}} = e^{\frac{2}{0^+}} = e^{\infty} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1+x}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ (1b)} \qquad \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1+x}{1-x}} = e^{\frac{2}{0^-}} = e^{-\infty} = 0 \text{ (1b)}$$

$f'(x) = \dfrac{2e^{\frac{1+x}{1-x}}}{(x-1)^2}$; f' je definována na D_f (2b)

nulové body derivace: $f'(x) = 0$ neexistují (0,5b)

monotonie funkce: $f'(x) > 0$ na $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$ a funkce je v nich rostoucí (1b)

Globální minimum funkce nemá, bod $[1, 0] \notin D_f$, glob. maximum díky limitám taky ne. (0,5b)

$f''(x) = \dfrac{4(2-x)e^{\frac{1+x}{1-x}}}{(x-1)^4}$; f'' je definována na D_f (2b)

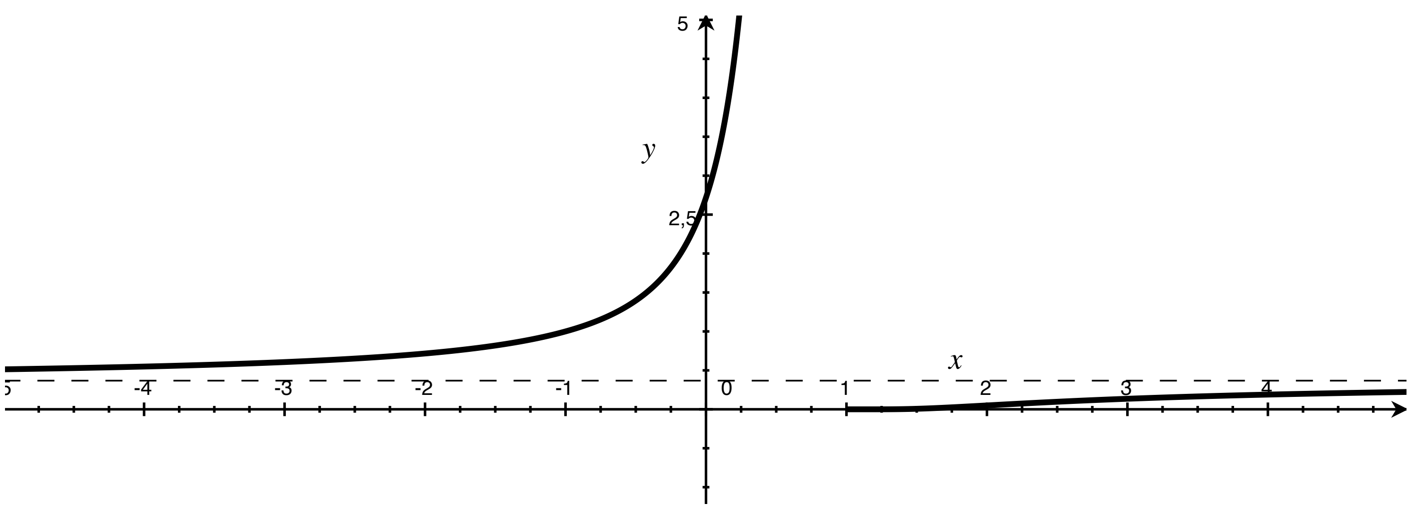
nulové body 2. derivace: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$, t.j. $[2, \dfrac{1}{e^3}]$ (0,5b)

konvexita/konkavita: $f''(x) < 0$ na $(1, 2)$ a funkce je tady konkávní, $f''(x) > 0$ na $(-\infty, 1)$ a $(2, \infty)$ a funkce je tady konvexní (1b)

inflexní bod je $[2, \dfrac{1}{e^3}]$ (0,5b)

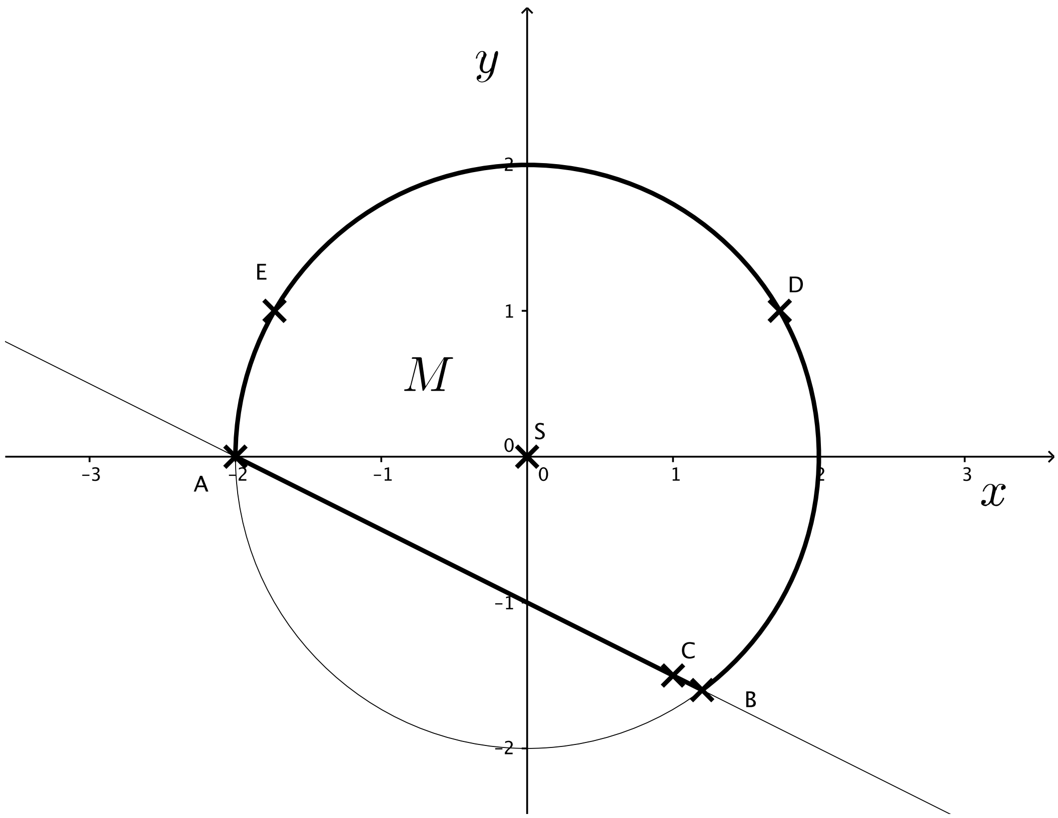
asymptoty $y = kx + q$ v $\pm\infty$:
z limit je vidět:
asymptoty splynou do přímky $y = \frac{1}{e}$ (2b)

graf: (4b)



3. (18b) Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = e^{x(y+2)}$
na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4, y \ge -\frac{x}{2} - 1\}$
Zadanou množinu M nakreslete a vyznačte v ní všechny nalezené kandidáty.
Pomùcka: $e \doteq 2{,}72$, $\sqrt{3} \doteq 1{,}73$, $2\sqrt{3} \doteq 3{,}46$, $3\sqrt{3} \doteq 5{,}20$.

Obrázek s kandidáty (3b)



Vrcholy:
průsečíky kružnice $x^2 + y^2 = 4$ a přímky $y = -\frac{x}{2} - 1$ - dosazením:
Řešením jsou body $A[-2,0], B[\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}]$ (2b)
Stacionární body:
$\partial_x f = (y+2)e^{x(y+2)} = 0$
$\partial_y f = xe^{x(y+2)} = 0$
Stacionární bod $S[0,-2] \notin M$ (3b)

Vázané extrémy:
Úsečka $\overline{AB}$
$x = -2y - 2, y \in (-\frac{8}{5}, 2)$
$f(-2y-2, y) = g(y) = e^{(-2y^2-6y-4)}$
$g'(y) = (-4y-6)e^{(-2y^2-6y-4)}$
$g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}$ kandidát $C[1, -\frac{3}{2}]$ (3b)

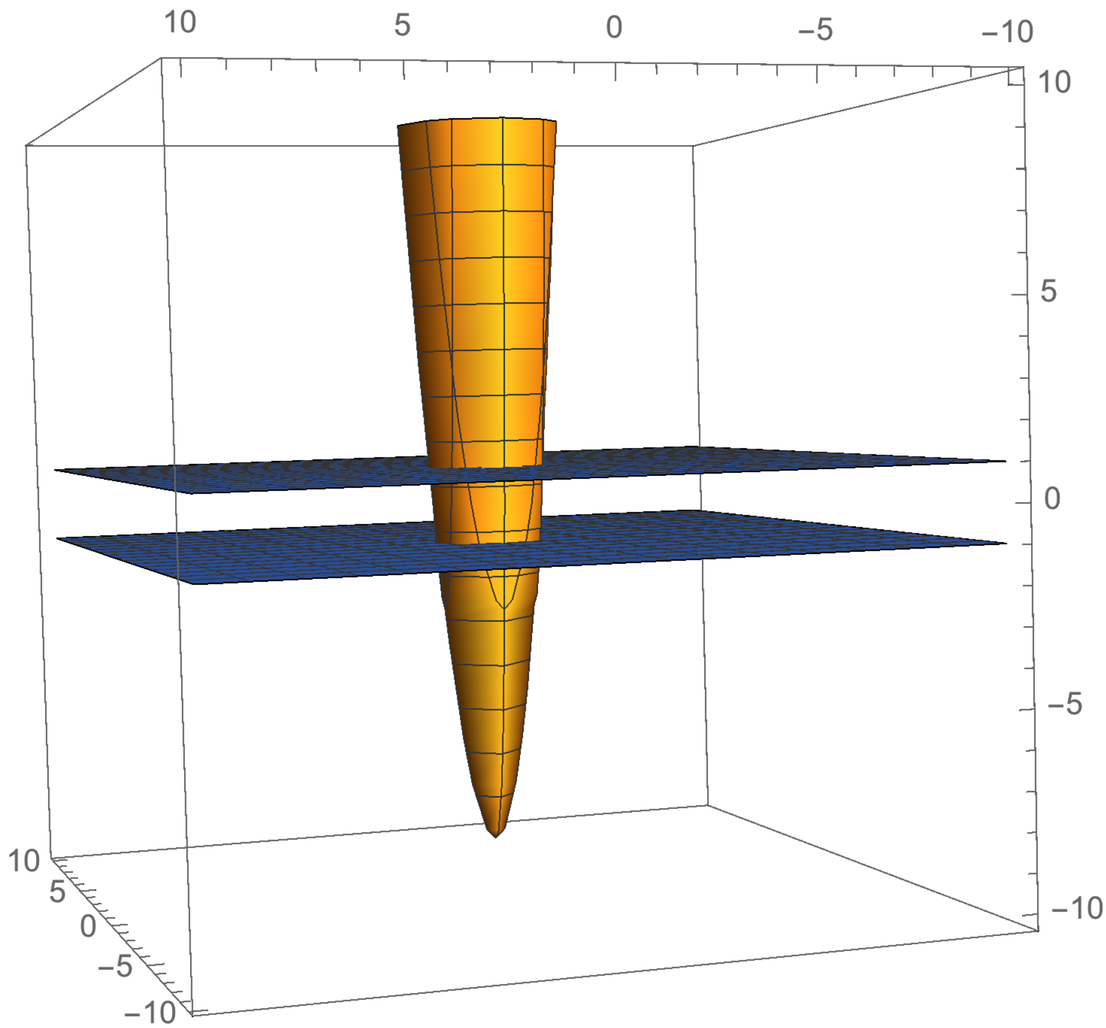
Část kružnice AB (např. Jacobián)
$x \in \langle -2, 1)$
$(1) g = x^2 + y^2 - 4 = 0$
$(2) \det \mathcal{J} = \det \begin{pmatrix} (y+2)e^{x(y+2)} & xe^{x(y+2)} \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = 2e^{x(y+2)}(y^2 + 2y - x^2) = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2y - x^2 = 0$
$x^2 = y^2 + 2y$ dosadíme do (1) a máme $y = 1$, nebo $y = -2$. Dopočítáme x a dostáváme $D[\sqrt{3}, 1], E[-\sqrt{3}, 1]$
(4b)

Hodnoty $f(A) = e^{-4}; f(B) = e^{\frac{12}{25}}; f(C) = e^{\frac{1}{2}}; f(D) = e^{3\sqrt{3}}, f(E) = e^{-3\sqrt{3}}$
Maximum v bode $D[\sqrt{3}, 1]$,minimum v bode $E[-\sqrt{3}, 1]$ (3b)

---

4. (18b) Určete globální extrémy funkce $f(x, y, z) = 4xy - z^2$
s vazbami $g_1 : 4x^2 + 4y^2 - z - 9 = 0, \quad g_2 : z^2 - 1 = 0.$

Výpočet pomocí Jacobiánu:
$(1) g_1(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 - z - 9 = 0$
$(2) g_2(x, y, z) = z^2 - 1 = 0$
$(3) \det \mathcal{J} = \det \begin{pmatrix} 4y & 4x & -2z \\ 8x & 8y & -z \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix} =$ (6b)
$= 64z(y^2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow (z = 0 \vee x = \pm y)$
Dosazujeme postupně:
Z (1) je vidět, že $z = \pm 1 \neq 0$ a tedy z (3) platí $x = \pm y$ resp. $x^2 = y^2$ a dosadíme do $(1), (2)$. Řešíme rovnici $8x^2 - z - 9 = 0$ pro $z = \pm 1$ a dostáváme $x = \pm 1 \vee x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$
$A[-1, -1, -1], f(A) = 3$
$B[-1, 1, -1], f(B) = -5$
$C[1, -1, -1], f(C) = -5$
$D[1, 1, -1], f(D) = 3$
$E[-\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}, 1], f(E) = 4$
$F[-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, 1], f(F) = -6$
$G[\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}, 1], f(G) = -6$
$H[\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, 1], f(H) = 4$
případné hodnoty $\lambda_1 = \pm\frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{3}{4} \vee \frac{5}{4}$. (10b)
Maximum je v bodech E, H, minimum v F, G. (2b)
(Pro ilustraci - vazby jsou průnik paraboloidu a dvou rovnoběžných rovin)


10
5
0
−5
−10
10
5
0
−5
−10
10
5
0
−5
−10