Matematika 1

ZS 2016-17

Miroslav Zelený

1. Množiny, výroky a číselné obory

Množiny a množinové operace

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů (které nazýváme **prvky**) do jediného celku.

Definice

Dvě množiny jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky.

Definice

Dvě množiny jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky. Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme $A \subset B$.

Definice

Dvě množiny jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky. Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme $A \subset B$. **Prázdnou množinou** nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označíme ji symbolem $\emptyset$.

Definice

Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B.

Definice

Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B. Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Definice

Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B. Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$. Je-li $\mathcal{A}$ systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

Definice

Průnikem dvou množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$.

Definice

Průnikem dvou množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li dvě množiny prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Definice

Průnikem dvou množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li dvě množiny prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**. Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$.

Definice

Rozdílem množin A a B (značíme $A \setminus B$) nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B.

Definice

Rozdílem množin A a B (značíme $A \setminus B$) nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B. **Kartézským součinem** množin $A_1, \dots, A_n$ nazveme množinu všech uspořádaných n-tic

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \\ = \{[a_1, a_2, \dots, a_n];\ a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Věta 1.1

Nechť X je množina a $\mathcal{A}$ je neprázdný systém množin. Pak platí

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}$$

a dále

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}.$$

1.2 Výrokový a predikátový počet

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

1.2 Výrokový a predikátový počet

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice

Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A.

1.2 Výrokový a predikátový počet

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice

Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A.

A	$\neg A$
0	1

1.2 Výrokový a predikátový počet

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice

Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A.

A	$\neg A$
0	1
1	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

$$\textit{Platí } A \textit{ i } B.$$

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

$$\textit{Platí } A \textit{ nebo } B.$$

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

A	B	$A \vee B$
0	0	0

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**.

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**. Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A.

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(Platnost výroku) A je **nutnou a postačující** podmínkou (platnosti výroku) B.

Definice

Výrokovou formou budeme nazývat výraz

$$A(x_1, x_2, \dots x_m),$$

z něhož vznikne výrok dosazením prvků $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_m \in M_m$ z daných množin $M_1, \dots, M_m$.

Definice

Nechť $A(x), \ x \in M$, je výroková forma. Výrok

$$\textit{Pro všechna } x \in M \textit{ platí } A(x).$$

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M \colon A(x).$$

Definice

Nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

Pro všechna $x \in M$ platí $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M\colon\ A(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným** (**velkým**) **kvantifikátorem**.

Definice

Nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

Existuje $x \in M$, pro které platí $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M\colon A(x).$$

Definice

Nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

$$\textit{Existuje } x \in M, \textit{ pro které platí } A(x).$$

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M \colon A(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním** (**malým**) **kvantifikátorem**.

1.3 Zavedení množiny reálných čísel

Množinou reálných čísel **R** budeme rozumět množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

1.3 Zavedení množiny reálných čísel

Množinou reálných čísel **R** budeme rozumět množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah.

1.3 Zavedení množiny reálných čísel

Množinou reálných čísel **R** budeme rozumět množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah.
II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení.

1.3 Zavedení množiny reálných čísel

Množinou reálných čísel **R** budeme rozumět množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah.
II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení.
III. Axiom infima.

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená zdola**, jestliže existuje číslo $a \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$.

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená zdola**, jestliže existuje číslo $a \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$. Takové číslo a se nazývá **dolní závorou** množiny M.

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená zdola**, jestliže existuje číslo $a \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$. Takové číslo a se nazývá **dolní závorou** množiny M. Analogicky definujeme pojmy **množina omezená shora** a **horní závora**.

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená zdola**, jestliže existuje číslo $a \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$. Takové číslo a se nazývá **dolní závorou** množiny M. Analogicky definujeme pojmy **množina omezená shora** a **horní závora**. Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Axiom infima: Budiž M neprázdná zdola omezená množina. Potom existuje jediné číslo $g \in \mathbf{R}$, které má následující vlastnosti:

(i) $\forall x \in M \colon x \geq g$,

Axiom infima: Budiž M neprázdná zdola omezená množina. Potom existuje jediné číslo $g \in \mathbf{R}$, které má následující vlastnosti:

(i) $\forall x \in M\colon x \geq g$,

(ii) $\forall g' \in \mathbf{R}, g' > g\ \exists x \in M\colon x < g'$.

Axiom infima: Budiž M neprázdná zdola omezená množina. Potom existuje jediné číslo $g \in \mathbf{R}$, které má následující vlastnosti:

(i) $\forall x \in M\colon x \geq g$,

(ii) $\forall g' \in \mathbf{R}, g' > g \ \exists x \in M\colon x < g'$.

Číslo g značíme symbolem $\inf M$ a čteme **infimum** M.

Definice

Budiž $M \subset \mathbf{R}$. Číslo $G \in \mathbf{R}$ splňující

(i) $\forall x \in M: \; x \leq G$,

(ii) $\forall G' \in \mathbf{R}, G' < G \, \exists x \in M: x > G'$,

nazýváme **supremem** množiny M. Značíme ho symbolem $\sup M$.

Definice

Budiž $M \subset \mathbf{R}$. Číslo $G \in \mathbf{R}$ splňující

(i) $\forall x \in M: \; x \leq G$,

(ii) $\forall G' \in \mathbf{R}, G' < G \, \exists x \in M: x > G'$,

nazýváme **supremem** množiny M. Značíme ho symbolem $\sup M$.

Věta 1.2

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ je neprázdná shora omezená množina. Pak existuje právě jedno supremum množiny M.

Definice

Budiž $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **největší prvek** (**maximum**) množiny M (značíme $\max M$), jestliže $a \in M$ a a je horní závorou množiny M. Analogicky definujeme **nejmenší prvek** (**minimum**) M, který značíme $\min M$.

Věta 1.3

Pro každé $r \in \mathbf{R}$ *existuje* ***celá část čísla*** r*, tj. číslo* $k \in \mathbf{Z}$ *takové, že* $k \leq r < k + 1$*. (Celou část čísla* r *značíme* $[r]$*).*

Věta 1.3

Pro každé $r \in \mathbf{R}$ *existuje* ***celá část čísla*** r*, tj. číslo* $k \in \mathbf{Z}$ *takové, že* $k \leq r < k + 1$*. (Celou část čísla* r *značíme* $[r]$*).*

Věta 1.4

Ke každému $x \in \mathbf{R}$ *existuje* $n \in \mathbf{N}$ *takové, že platí* $x < n$*.*

Věta 1.5

Ke každému $x \in \langle 0, +\infty)$ *a ke každému* $n \in \mathbf{N}$ *existuje právě jedno* $y \in \mathbf{R}$, $y \geq 0$, *splňující* $y^n = x$.

Věta 1.5

Ke každému $x \in \langle 0, +\infty)$ *a ke každému* $n \in \mathbf{N}$ *existuje právě jedno* $y \in \mathbf{R}$, $y \geq 0$, *splňující* $y^n = x$.

Věta 1.6

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. *Pak existuje* $r \in \mathbf{Q}$ *takové, že* $a < r < b$.

Kurt Gödel (1906–1978)

2. Posloupnosti reálných čísel

2.1 Úvod

Definice

Jestliže každému přirozenému číslu n je přiřazeno reálné číslo a_n, potom říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **posloupnost** reálných čísel.

2.1 Úvod

Definice

Jestliže každému přirozenému číslu n je přiřazeno reálné číslo a_n, potom říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **posloupnost** reálných čísel. Číslo a_n nazveme n**-tým členem** této posloupnosti. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovna posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže platí $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, pokud je rostoucí či klesající.

2.2 Konvergence posloupnosti

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má **limitu** rovnou reálnému číslu A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbf{N} \; \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; |a_n - A| < \varepsilon.$$

Značíme $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$.

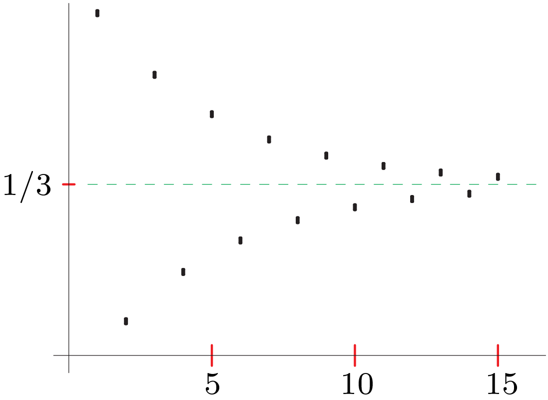
2.2 Konvergence posloupnosti

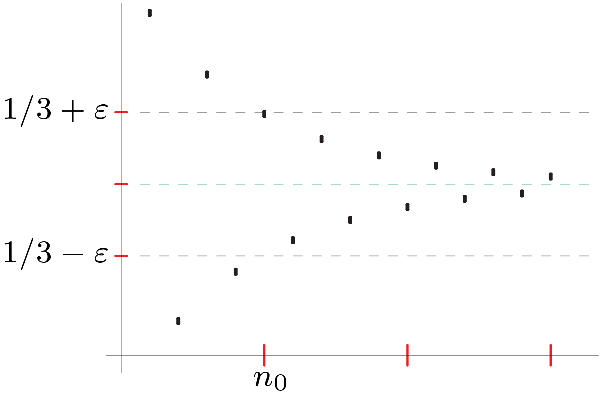
Definice

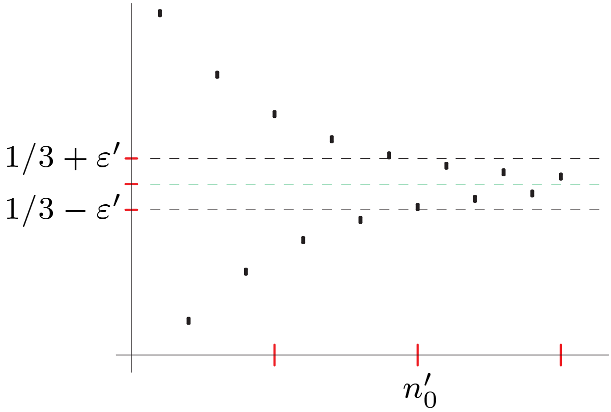
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má **limitu** rovnou reálnému číslu A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbf{N} \; \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; |a_n - A| < \varepsilon.$$

Značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **konvergentní**, pokud existuje $A \in \mathbf{R}$ takové, že $\lim a_n = A$.


1/3
5
10
15


$1/3+\varepsilon$
$1/3-\varepsilon$
n_0


$1/3+\varepsilon'$
$1/3-\varepsilon'$
n_0'

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Věta 2.2

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Věta 2.2

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá **vybranou posloupností z** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta 2.3

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim_{n\to+\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.3

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim_{n\to+\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.4 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

Věta 2.3

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim_{n\to+\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.4 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

Věta 2.3

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim_{n\to+\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.4 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

(i) $\lim\,(a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim\,(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$, *je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Věta 2.3

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim_{n\to+\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.4 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$, *je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Věta 2.3

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim_{n\to+\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.4 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

(i) $\lim\,(a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim\,(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$, *je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Věta 2.3

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim_{n\to+\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.4 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$, *je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Věta 2.5

Nechť $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená.*
Potom $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 2.5

Nechť $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená. Potom* $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 2.6 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$.

(i) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

Věta 2.5

Nechť $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená. Potom* $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 2.6 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$.

(i) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

(ii) *Nechť* $A < B$. *Potom existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$.

Věta 2.5

Nechť $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená. Potom* $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 2.6 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$.

(i) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

(ii) *Nechť* $A < B$. *Potom existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$.

Věta 2.5

Nechť $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená. Potom* $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 2.6 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$.

(i) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

(ii) *Nechť* $A < B$. *Potom existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$.

Věta 2.7 (o dvou strážnících)

Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *taková posloupnost, že platí:*

(i) $\exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \leq c_n \leq b_n,$

Věta 2.7 (o dvou strážnících)

Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *taková posloupnost, že platí:*

(i) $\exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \leq c_n \leq b_n,$

(ii) $\lim a_n = \lim b_n.$

Věta 2.7 (o dvou strážnících)

Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *taková posloupnost, že platí:*

(i) $\exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \leq c_n \leq b_n$,

(ii) $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom existuje $\lim c_n$ *a platí* $\lim c_n = \lim a_n$.

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$, jestliže

$$\forall L \in \mathbf{R}\, \exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \geq L.$$

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$, jestliže

$$\forall L \in \mathbf{R}\, \exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \geq L.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$, jestliže

$$\forall K \in \mathbf{R}\, \exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \leq K.$$

Věta 2.8 (aritmetika limit podruhé)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim (a_n \pm b_n) = A \pm B$, *pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je pravá strana definována,*

(iii) $\lim a_n / b_n = A/B$, *pokud je pravá strana definována.*

Věta 2.8 (aritmetika limit podruhé)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim (a_n \pm b_n) = A \pm B$, *pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je pravá strana definována,*

(iii) $\lim a_n/b_n = A/B$, *pokud je pravá strana definována.*

Věta 2.9

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$, $A > 0$, $\lim b_n = 0$ *a existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$, *že pro každé* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, *platí* $b_n > 0$. *Pak* $\lim a_n/b_n = +\infty$.

2.4 Hlubší věty o limitě posloupnosti

Věta 2.10

Každá monotónní posloupnost má limitu.

2.4 Hlubší věty o limitě posloupnosti

Věta 2.10

Každá monotónní posloupnost má limitu.

Věta 2.11 (Bolzano–Weierstrass)

Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

K důkazu Věty 2.11

(i) Interval $\langle c_k, d_k \rangle$ je roven intervalu $\langle c_{k-1}, c_{k-1} + \frac{1}{2}(d_{k-1} - c_{k-1}) \rangle$ nebo intervalu $\langle c_{k-1} + \frac{1}{2}(d_{k-1} - c_{k-1}), d_{k-1} \rangle$.

(ii) Množina $\{j \in \mathbf{N};\ a_j \in \langle c_k, d_k \rangle\}$ je nekonečná.

3. Zobrazení

Definice

Nechť A a B jsou množiny. **Zobrazením množiny A do množiny B** nazveme předpis, kterým každému prvku x množiny A přiřadíme jediný prvek y z množiny B.

Definice

Nechť A a B jsou množiny. **Zobrazením množiny A do množiny B** nazveme předpis, kterým každému prvku x množiny A přiřadíme jediný prvek y z množiny B.

- Symbolem $f\colon A \to B$ značíme, že f je zobrazením množiny A do množiny B.

Definice

Nechť A a B jsou množiny. **Zobrazením množiny A do množiny B** nazveme předpis, kterým každému prvku x množiny A přiřadíme jediný prvek y z množiny B.

- Symbolem $f\colon A \to B$ značíme, že f je zobrazením množiny A do množiny B.
- Symbolem $f\colon x \mapsto f(x)$ značíme, že zobrazení f přiřazuje prvku x prvek $f(x)$.

Definice

Nechť A a B jsou množiny. **Zobrazením množiny A do množiny B** nazveme předpis, kterým každému prvku x množiny A přiřadíme jediný prvek y z množiny B.

- Symbolem $f\colon A \to B$ značíme, že f je zobrazením množiny A do množiny B.
- Symbolem $f\colon x \mapsto f(x)$ značíme, že zobrazení f přiřazuje prvku x prvek $f(x)$.
- Množinu A z definice zobrazení nazýváme **definičním oborem zobrazení** f a značíme ji symbolem D_f.

Definice

Nechť $A,\ B$ jsou neprázdné množiny a $f\colon A \to B$.

- Množina
$$f(A) = \{f(x);\ x \in A\}$$
se nazývá **obor hodnot** zobrazení f. (Značíme R_f nebo H_f.)

Definice

Nechť A, B jsou neprázdné množiny a $f\colon A \to B$.

- Množina
$$f(A) = \{f(x);\ x \in A\}$$
se nazývá **obor hodnot** zobrazení f. (Značíme R_f nebo H_f.)
- **Obrazem** množiny $X \subset A$ při zobrazení f se nazývá množina
$$f(X) = \{f(x);\ x \in X\}.$$

Definice

Nechť A, B jsou neprázdné množiny a $f\colon A \to B$.

- Množina
$$f(A) = \{f(x);\ x \in A\}$$
se nazývá **obor hodnot** zobrazení f. (Značíme R_f nebo H_f.)
- **Obrazem** množiny $X \subset A$ při zobrazení f se nazývá množina
$$f(X) = \{f(x);\ x \in X\}.$$
- **Vzorem** množiny $Y \subset B$ při zobrazení f nazveme množinu
$$\{x \in A;\ f(x) \in Y\}.$$

Definice

Nechť A, B jsou neprázdné množiny a $f\colon A \to B$.

- Zobrazení f je **na**, jestliže $f(A) = B$.

Definice

Nechť A, B jsou neprázdné množiny a $f\colon A \to B$.

- Zobrazení f je **na**, jestliže $f(A) = B$.
- Zobrazení f je **prosté**, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in A:\; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Definice

Nechť A, B jsou neprázdné množiny a $f\colon A \to B$.

- Zobrazení f je **na**, jestliže $f(A) = B$.
- Zobrazení f je **prosté**, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in A: \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

- Podmnožina $G_f = \{[x, y];\; x \in A,\; y = f(x)\}$ kartézského součinu $A \times B$ se nazývá **grafem zobrazení** f.

Definice

Nechť A, B jsou neprázdné množiny a $f\colon A \to B$.

- Zobrazení f je **na**, jestliže $f(A) = B$.
- Zobrazení f je **prosté**, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in A: \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

- Podmnožina $G_f = \{[x, y];\; x \in A,\; y = f(x)\}$ kartézského součinu $A \times B$ se nazývá **grafem zobrazení** f.

Definice

Nechť $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to C$ jsou dvě zobrazení. Symbolem $g \circ f$ označíme zobrazení množiny A do množiny C definované předpisem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Takto definované zobrazení se nazývá **složeným zobrazením**.

Definice

Nechť $f: A \to B$ a $g: B \to C$ jsou dvě zobrazení. Symbolem $g \circ f$ označíme zobrazení množiny A do množiny C definované předpisem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Takto definované zobrazení se nazývá **složeným zobrazením**.

Definice

Nechť $f: A \to B$ je prosté a na. **Inverzním zobrazením** $f^{-1}: B \to A$ rozumíme zobrazení definované předpisem $f^{-1}: y \mapsto x$, kde x splňuje $f(x) = y$.

4. Funkce jedné reálné proměnné

4.1 Základní pojmy

Definice

Funkce f **jedné reálné proměnné** (dále jen **funkce**) je zobrazení $f\colon M \to \mathbf{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

4.1 Základní pojmy

Definice

Funkce f **jedné reálné proměnné** (dále jen **funkce**) je zobrazení $f\colon M \to \mathbf{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice

Funkce $f\colon J \to \mathbf{R}$ je **rostoucí** na intervalu J, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J,\ x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Analogicky definujeme funkci **klesající** (**neklesající**, **nerostoucí**) na intervalu J.

Definice

Monotónní funkcí (resp. **ryze monotónní funkcí**) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na J.

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická s periodou** $a \in \mathbf{R},\ a > 0$, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $x + a \in D_f,\ x - a \in D_f$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická s periodou** $a \in \mathbf{R},\ a > 0$, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $x + a \in D_f,\ x - a \in D_f$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$,
- **shora omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,

- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,

- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- **omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,

- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- **omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,
- **konstantní** na M, jestliže pro všechna $x, y \in M$ platí $f(x) = f(y)$.

4.2 Limita funkce

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,

4.2 Limita funkce

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
- **prstencové okolí bodu** c jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$,

4.2 Limita funkce

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
- **prstencové okolí bodu** c jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$,

Okolí a prstencové okolí bodu $+\infty$ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

$$P(+\infty, \varepsilon) = B(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty),$$
$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

Definice

Řekneme, že číslo $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce f v bodě $c \in \mathbf{R}^\star$**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Definice

Řekneme, že číslo $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce f v bodě $c \in \mathbf{R}^\star$**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P(c, \delta) \colon \, f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

To označujeme symbolem $\lim_{x \to c} f(x) = A$.

Definice

Řekneme, že číslo $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce f v bodě $c \in \mathbf{R}^\star$**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

To označujeme symbolem $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$.

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu c** jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,

Definice

Řekneme, že číslo $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce f v bodě $c \in \mathbf{R}^\star$**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

To označujeme symbolem $\lim_{x \to c} f(x) = A$.

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu c** jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu c** jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,

Definice

Řekneme, že číslo $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce f v bodě $c \in \mathbf{R}^\star$**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

To označujeme symbolem $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$.

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,
- **pravé prstencové okolí bodu** c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,

Definice

Řekneme, že číslo $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce f v bodě c** $\in \mathbf{R}^\star$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P(c, \delta) \colon \, f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

To označujeme symbolem $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$.

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,
- **pravé prstencové okolí bodu** c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** c jako $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$.

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** $+\infty$ jako $B^{-}(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** $+\infty$ jako $B^{-}(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B^{+}(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** $+\infty$ jako $B^{-}(+\infty,\varepsilon)=(1/\varepsilon,+\infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B^{+}(-\infty,\varepsilon)=(-\infty,-1/\varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** $+\infty$ jako $P^{-}(+\infty,\varepsilon)=B^{-}(+\infty,\varepsilon)$,

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** $+\infty$ jako $B^-(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B^+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** $+\infty$ jako $P^-(+\infty, \varepsilon) = B^-(+\infty, \varepsilon)$,
- **pravé prstencové okolí bodu** $-\infty$ jako $P^+(-\infty, \varepsilon) = B^+(-\infty, \varepsilon)$.

Definice

Nechť $A \in \mathbf{R}^\star$, $c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A (značíme $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\, \forall x \in P^+(c, \delta):\ f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Definice

Nechť $A \in \mathbf{R}^\star$, $c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A (značíme $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\, \forall x \in P^+(c, \delta): \; f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.

Definice

Nechť $A \in \mathbf{R}^\star$, $c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A (značíme $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\, \forall x \in P^+(c, \delta) : \; f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Pro limitu zleva funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$.

Definice

Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** c, jestliže $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Definice

Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** c, jestliže $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá zprava** (resp. **zleva**), jestliže $\lim_{x \to c+} f(x) = f(c)$ (resp. $\lim_{x \to c-} f(x) = f(c)$).

Definice

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,

Definice

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,

Definice

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá v každém vnitřním bodě J.

Věta 4.1

Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

Věta 4.1

Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

Věta 4.2

Nechť funkce f má vlastní limitu v bodě $c \in \mathbf{R}^\star$. Pak existuje $\delta > 0$, že f je na $P(c, \delta)$ omezená.

Věta 4.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

Věta 4.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x \to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x \to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

Věta 4.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

Věta 4.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

Věta 4.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

Věta 4.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$*. Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$*. Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$*, pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$*, pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$*, pokud je výraz* A/B *definován.*

Věta 4.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$*. Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$*. Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$*, pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$*, pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$*, pokud je výraz* A/B *definován.*

Věta 4.4

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $A > 0$. *Jestliže existuje* $\eta > 0$ *takové, že funkce* g *je kladná na* $P(c, \eta)$, *pak* $\lim_{x\to c}(f(x)/g(x)) = +\infty$.

Věta 4.5 (limita a uspořádání)

Mějme $c \in \mathbf{R}^\star$.

(i) *Nechť*

$$\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x).$$

Pak existuje prstencové okolí $P(c,\delta)$ *takové, že platí*

$$\forall x \in P(c,\delta): \ f(x) > g(x).$$

(ii) Nechť existuje prstencové okolí $P(c, \delta)$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta) : \; f(x) \leq g(x).$$

Nechť existují $\lim_{x \to c} f(x)$ a $\lim_{x \to c} g(x)$. Potom platí

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x).$$

(iii) (o dvou strážnících) Nechť na nějakém prstencovém okolí $P(c, \delta)$ platí

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Nechť $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$. Potom existuje rovněž $\lim_{x \to c} h(x)$ a všechny tři limity jsou si rovny.

Věta 4.6

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^{\star}$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

Věta 4.6

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0\, \forall x \in P(c, \eta):\ g(x) \neq D,$

Věta 4.6

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0\, \forall x \in P(c,\eta):\; g(x) \neq D$,

(S) *f je spojitá v D.*

Věta 4.6

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0\, \forall x \in P(c,\eta) : \; g(x) \neq D$,

(S) f *je spojitá v* D.

Potom $\lim_{x\to c} f(g(x)) = A$.

Věta 4.6

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0 \, \forall x \in P(c,\eta): \; g(x) \neq D$,

(S) f *je spojitá v* D.

Potom $\lim_{x\to c} f(g(x)) = A$.

Věta 4.6

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0\, \forall x \in P(c,\eta):\ g(x) \neq D$,

(S) *f je spojitá v D.*

Potom $\lim_{x\to c} f(g(x)) = A$.

Věta 4.7 (Heine)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$, $A \in \mathbf{R}^\star$ a funkce f je definována na prstencovém okolí bodu c. Pak jsou výroky (i) *a* (ii) *ekvivalentní.*

(i) *Platí* $\lim_{x \to c} f(x) = A$.

(ii) *Pro každou posloupnost* $\{x_n\}$ *splňující* $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq c$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$ *a* $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, *platí* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Věta 4.7 (Heine)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$, $A \in \mathbf{R}^\star$ a funkce f je definována na prstencovém okolí bodu c. Pak jsou výroky (i) *a* (ii) *ekvivalentní.*

(i) *Platí* $\lim_{x\to c} f(x) = A$.

(ii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Věta 4.8

Budiž funkce f monotónní na (a, b), $a, b \in \mathbf{R}^\star$. Potom existují $\lim_{x\to a+} f(x)$ *a* $\lim_{x\to b-} f(x)$.

4.3 Funkce spojité na intervalu

Věta 4.9 (Bolzano)

Budiž funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a předpokládejme, že $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f(\xi) = C$.

Lemma 4.10

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ *a platí*

$$\forall x, y \in M \, \forall z \in \mathbf{R} \colon x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

Lemma 4.10

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ a platí

$$\forall x, y \in M \, \forall z \in \mathbf{R} \colon x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

Pak M je interval.

Lemma 4.10

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ *a platí*

$$\forall x, y \in M \, \forall z \in \mathbf{R} \colon x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

Pak M *je interval.*

Věta 4.11

Nechť J *je nedegenerovaný interval. Nechť funkce* $f\colon J \to \mathbf{R}$ *je spojitá na* J*. Potom je* $f(J)$ *interval.*

Věta 4.12

Budiž f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom je f na $\langle a, b\rangle$ omezená shora i zdola.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$).

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon\ f(y) \leq f(x) \quad \text{(resp. } \forall y \in M\colon\ f(y) \geq f(x)\text{).}$$

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce f na množině M.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon\ f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M\colon\ f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce f na množině M. Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$).

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$).Řekneme, že funkce f má v bodě x

- **lokální maximum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M\colon f(y) \leq f(x)$,

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$).Řekneme, že funkce f má v bodě x

- **lokální maximum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M$: $f(y) \leq f(x)$,
- **lokální minimum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M$: $f(y) \geq f(x)$,

Věta 4.13

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom funkce f nabývá na $\langle a, b \rangle$ své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).

Věta 4.13

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom funkce f nabývá na $\langle a, b \rangle$ své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).

Věta 4.14

Budiž f spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.

Věta 4.15 (zavedení logaritmu)

Existuje jediná funkce (značíme ji log *a nazýváme ji* ***přirozeným logaritmem****), která má tyto vlastnosti:*

(L1) $D(\log) = (0, +\infty)$ *a na tomto intervalu je* log *rostoucí,*

(L2) $\forall x, y \in (0, +\infty)\colon\ \log xy = \log x + \log y,$

(L3) $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1.$

4.4 Zavedení elementárních funkcí

Věta 4.15 (zavedení logaritmu)

Existuje jediná funkce (značíme ji log *a nazýváme ji* ***přirozeným logaritmem****), která má tyto vlastnosti:*

(L1) $D(\log) = (0, +\infty)$ *a na tomto intervalu je* log *rostoucí,*

(L2) $\forall x, y \in (0, +\infty)\colon\ \log xy = \log x + \log y$*,*

(L3) $\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$*.*

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a > 0$. **Obecnou mocninu** a^b definujeme jako

$$a^b = \exp(b \log a).$$

Věta 4.16 (zavedení funkce sinus a čísla π)

Existuje jediné kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a jediná funkce **sinus** *(budeme ji značit* sin*), které mají následující vlastnosti:*

(S1) $D(\sin) = \mathbf{R}$,

(S2) sin *je rostoucí na* $\langle -\pi/2,\ \pi/2 \rangle$,

(S3) $\sin 0 = 0$,

(S4) $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ \sin(x+y) = \sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - y) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \sin y$,

(S5) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Definice

Funkci **kosinus** značíme cos a definujeme předpisem

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Funkci **tangens** značíme tg a definujeme předpisem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

pro každé reálné x, pro něž má zlomek smysl, tj.

$$D_{\mathrm{tg}} = \{x \in \mathbf{R};\ x \neq (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

A konečně symbolem cotg budeme značit funkci **kotangens**, která je definována na množině $D_{\text{cotg}} = \{x \in \mathbf{R};\ x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ předpisem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

A konečně symbolem cotg budeme značit funkci **kotangens**, která je definována na množině $D_{\text{cotg}} = \{x \in \mathbf{R};\ x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ předpisem

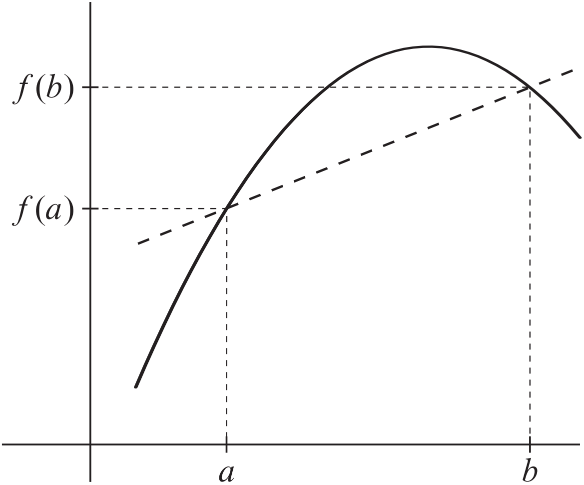
$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Věta 4.17

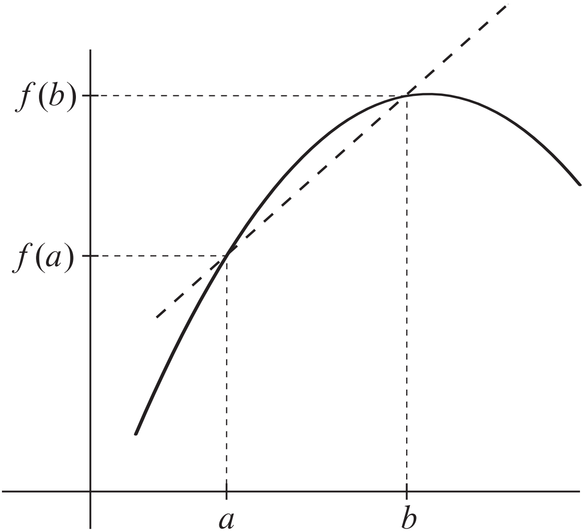
Funkce log, exp, sin, cos, tg, cotg, arcsin, arccos, arctg *a* arccotg *jsou spojité na svých definičních oborech.*

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

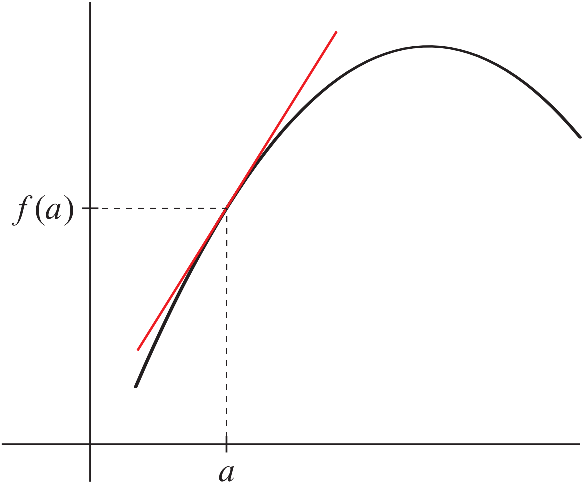
Geometrický význam derivace



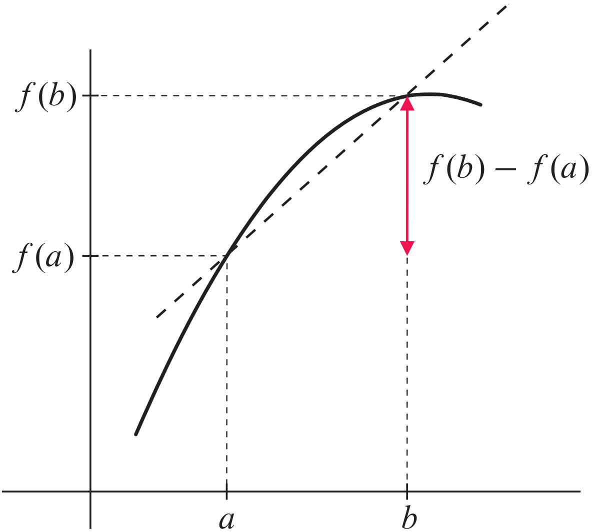
Geometrický význam derivace



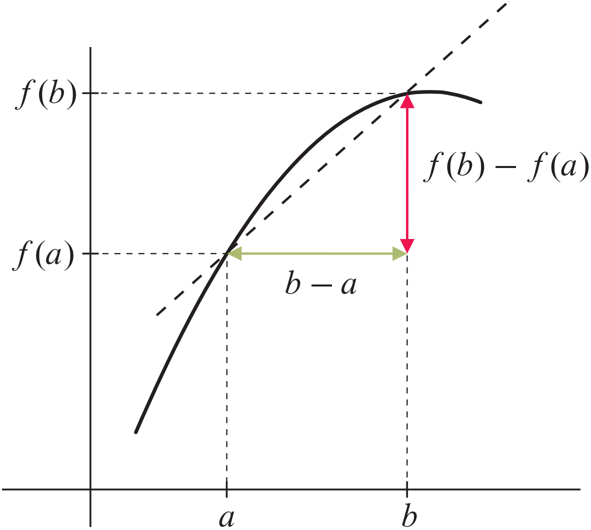
Geometrický význam derivace



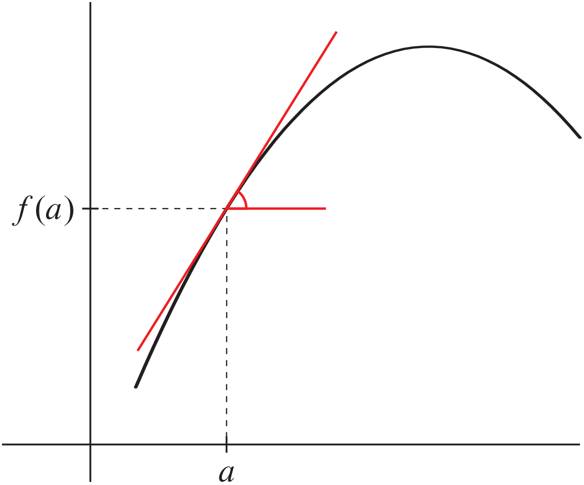
Geometrický význam derivace



Geometrický význam derivace



Geometrický význam derivace



4.5 Derivace funkce

Definice

Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak

- **derivací funkce** f **v bodě** a budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

4.5 Derivace funkce

Definice

Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak

- **derivací funkce** f **v bodě** a budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

- **derivací funkce** f **v bodě** a **zprava** budeme rozumět

$$f'_{+}(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

4.5 Derivace funkce

Definice

Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak

- **derivací funkce** f **v bodě** a budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

- **derivací funkce** f **v bodě** a **zprava** budeme rozumět

$$f'_{+}(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

- **derivací funkce** f **v bodě** a **zleva** budeme rozumět

$$f'_{-}(a) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Věta 4.18

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 4.18

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 4.19 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí

Věta 4.18

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 4.19 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

Věta 4.18

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 4.19 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

Věta 4.18

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 4.19 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(iii) *je-li* $g(a) \neq 0$, *pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Věta 4.18

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 4.19 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(iii) *je-li* $g(a) \neq 0$, *pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Věta 4.18

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 4.19 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(iii) *je-li* $g(a) \neq 0$, *pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Věta 4.18

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 4.19 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(iii) *je-li* $g(a) \neq 0$, *pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Věta 4.20 (derivace složené funkce)

Nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $y_0 \in \mathbf{R}$, funkce g má vlastní derivaci v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$ a $y_0 = g(x_0)$. Pak

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Věta 4.20 (derivace složené funkce)

Nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $y_0 \in \mathbf{R}$, funkce g má vlastní derivaci v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$ a $y_0 = g(x_0)$. Pak

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Věta 4.21 (derivace inverzní funkce)

Nechť funkce f je na intervalu (a, b) spojitá a rostoucí (resp. klesající). Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in (a, b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí rovnost

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Věta 4.22 (nutná podmínka lokálního extrému)

Budiž $x_0 \in \mathbf{R}$ *bodem lokálního maxima nebo lokálního minima funkce* f. *Jestliže existuje* $f'(x_0)$, *potom je* $f'(x_0) = 0$.

Věta 4.22 (nutná podmínka lokálního extrému)

Budiž $x_0 \in \mathbf{R}$ *bodem lokálního maxima nebo lokálního minima funkce* f*. Jestliže existuje* $f'(x_0)$*, potom je* $f'(x_0) = 0$*.*

Věta 4.23 (Rolle)

Nechť funkce f *má následující vlastnosti:*

(i) *je spojitá na intervalu* $\langle a, b \rangle$*,*

Věta 4.22 (nutná podmínka lokálního extrému)

Budiž $x_0 \in \mathbf{R}$ *bodem lokálního maxima nebo lokálního minima funkce* f. *Jestliže existuje* $f'(x_0)$, *potom je* $f'(x_0) = 0$.

Věta 4.23 (Rolle)

Nechť funkce f *má následující vlastnosti:*

(i) *je spojitá na intervalu* $\langle a, b \rangle$,

(ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu* (a, b),

Věta 4.22 (nutná podmínka lokálního extrému)

Budiž $x_0 \in \mathbf{R}$ bodem lokálního maxima nebo lokálního minima funkce f. Jestliže existuje $f'(x_0)$, potom je $f'(x_0) = 0$.

Věta 4.23 (Rolle)

Nechť funkce f má následující vlastnosti:

(i) *je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,*

(ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),*

(iii) *platí, že $f(a) = f(b)$.*

Věta 4.22 (nutná podmínka lokálního extrému)

Budiž $x_0 \in \mathbf{R}$ *bodem lokálního maxima nebo lokálního minima funkce* f. *Jestliže existuje* $f'(x_0)$, *potom je* $f'(x_0) = 0$.

Věta 4.23 (Rolle)

Nechť funkce f *má následující vlastnosti:*

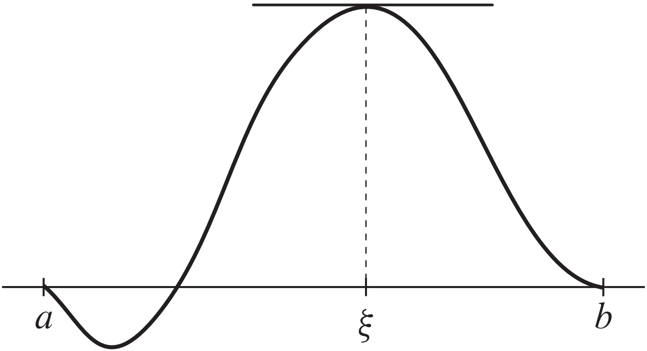
(i) *je spojitá na intervalu* $\langle a, b\rangle$,

(ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu* (a, b),

(iii) *platí, že* $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $\xi \in (a, b)$ *takové, že platí* $f'(\xi) = 0$.

Geometrický význam Rolleovy věty

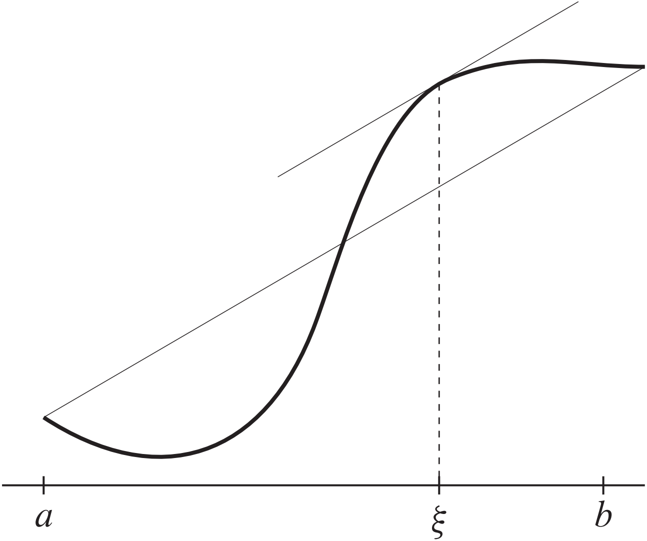


Věta 4.24 (Lagrange)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b). Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometrický význam Lagrangeovy věty



Věta 4.25 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ *je nedegenerovaný interval. Nechť* f *je spojitá na* J *a v každém vnitřním bodě* J *(množinu vnitřních bodů intervalu* J *označme jako* $\operatorname{int} J$*) má derivaci.*

Věta 4.25 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ *je nedegenerovaný interval. Nechť* f *je spojitá na* J *a v každém vnitřním bodě* J *(množinu vnitřních bodů intervalu* J *označme jako* $\operatorname{int} J$*) má derivaci.*

(i) *Je-li* $f'(x) > 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$*, pak* f *je rostoucí na* J*.*

Věta 4.25 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$*) má derivaci.*

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.*

Věta 4.25 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ *je nedegenerovaný interval. Nechť* f *je spojitá na* J *a v každém vnitřním bodě* J *(množinu vnitřních bodů intervalu* J *označme jako* $\operatorname{int} J$*) má derivaci.*

(i) *Je-li* $f'(x) > 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$*, pak* f *je rostoucí na* J*.*

(ii) *Je-li* $f'(x) < 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$*, pak* f *je klesající na* J*.*

(iii) *Je-li* $f'(x) \geq 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$*, pak* f *je neklesající na* J*.*

Věta 4.25 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je neklesající na J.*

(iv) *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je nerostoucí na J.*

Věta 4.25 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ *je nedegenerovaný interval. Nechť* f *je spojitá na* J *a v každém vnitřním bodě* J *(množinu vnitřních bodů intervalu* J *označme jako* $\operatorname{int} J$*) má derivaci.*

(i) *Je-li* $f'(x) > 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$*, pak* f *je rostoucí na* J*.*

(ii) *Je-li* $f'(x) < 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$*, pak* f *je klesající na* J*.*

(iii) *Je-li* $f'(x) \geq 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$*, pak* f *je neklesající na* J*.*

(iv) *Je-li* $f'(x) \leq 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$*, pak* f *je nerostoucí na* J*.*

Věta 4.25 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je neklesající na J.*

(iv) *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je nerostoucí na J.*

Věta 4.26 (l'Hospitalovo pravidlo)

(i) *Nechť* $a \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$, *$f$ a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje* $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Pak*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta 4.26 (l'Hospitalovo pravidlo)

(i) *Nechť* $a \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$, *f a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje* $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Pak*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) *Nechť* $a \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to a+} |g(x)| = +\infty$, *f a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje* $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Pak*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta 4.27

Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbf{R}$ a existuje $\lim_{x \to a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} f'(x).$$

Věta 4.27

Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbf{R}$ a existuje $\lim_{x \to a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} f'(x).$$

Definice

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$ a f má vlastní n-tou derivaci na okolí bodu a. Pak $(n+1)$**-ní derivací** funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

4.6 Konvexní a konkávní funkce

Definice

Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbf{R}$. Označme

$$T_a = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = f(a) + f'(a)(x - a)\}.$$

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ **leží pod tečnou** T_a, jestliže

$$f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že bod $[x, f(x)]$ **leží nad tečnou** T_a.

Definice

Nechť $f'(a) \in \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **inflexním bodem** funkce f, jestliže existuje $\Delta > 0$ takové, že platí

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a): \ [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta): \ [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a

nebo

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a): \ [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta): \ [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a.

Věta 4.28 (nutná podmínka pro inflexi)

Nechť $a \in \mathbf{R}$ *je inflexní bod funkce* f. *Potom* $f''(a)$ *neexistuje nebo je rovna nule.*

Věta 4.28 (nutná podmínka pro inflexi)

Nechť $a \in \mathbf{R}$ *je inflexní bod funkce* f*. Potom* $f''(a)$ *neexistuje nebo je rovna nule.*

Věta 4.29 (postačující podmínka pro inflexi)

Nechť funkce f *má spojitou první derivaci na intervalu* (a, b) *a* $z \in (a, b)$*. Nechť platí:*

- $\forall x \in (a, z)\colon f''(x) > 0$,
- $\forall x \in (z, b)\colon f''(x) < 0$.

Potom z *je inflexním bodem funkce* f*.*

Definice

Řekneme, že funkce $f\colon I \to \mathbf{R}$ je **konvexní na intervalu** I, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I\, \forall \lambda \in \langle 0, 1\rangle : \; f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Definice

Řekneme, že funkce $f\colon I \to \mathbf{R}$ je **konvexní na intervalu I**, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I\, \forall \lambda \in \langle 0, 1\rangle:\ f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbf{R}$ je **ryze konvexní na intervalu I**, jestliže

$$\begin{aligned}\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2\ \forall \lambda \in (0, 1):&\\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &< \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).\end{aligned}$$

Lemma 4.30

Funkce f je na intervalu I konvexní, právě když

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Věta 4.31

Nechť f má na intervalu (a, b), $a < b$, spojitou první derivaci.

(i) *Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b).*

Věta 4.31

Nechť f má na intervalu (a, b), $a < b$, spojitou první derivaci.

(i) *Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b).*

(ii) *Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b).*

Věta 4.31

Nechť f má na intervalu (a, b), $a < b$, spojitou první derivaci.

(i) *Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b).*

(ii) *Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b).*

(iii) *Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b).*

Věta 4.31

Nechť f má na intervalu (a, b), $a < b$, spojitou první derivaci.

(i) *Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b).*

(ii) *Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b).*

(iii) *Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b).*

(iv) *Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konkávní na (a, b).*

Definice

Řekneme, že funkce $x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbf{R}$, je **asymptotou funkce** f v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax-b) = 0, \qquad \text{(resp. } \lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax-b) = 0).$$

4.7 Průběh funkce

Definice

Řekneme, že funkce $x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbf{R}$, je **asymptotou funkce** f v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax-b) = 0, \qquad \text{(resp. } \lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax-b) = 0).$$

Věta 4.32

Funkce f má v $+\infty$ asymptotu $x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbf{R}$, právě když

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}, \qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = b \in \mathbf{R}.$$

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.
2. Zjistíme průsečíky se souřadnými osami.
3. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
4. Dopočítáme limity v krajních bodech definičního oboru.
5. Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
6. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde funkce f je konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
7. Vypočteme asymptoty funkce.
8. Načrtneme graf funkce.