

1 Množiny, výroky a číselné obory

1.1 Množiny a množinové operace

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů (které nazýváme **prvky**) do jediného celku.

Definice. Dvě množiny jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky. Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B . Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme $A \subset B$. **Prázdnou množinou** nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označíme ji symbolem \emptyset .

Definice. Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B . Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$. Je-li \mathcal{A} systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a , pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

Definice. Průnikem dvou množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B . Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li dvě množiny prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**. Je-li \mathcal{A} neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a , které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$.

Definice. Rozdílem množin A a B (značíme $A \setminus B$) nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B . **Kartézským součinem** množin A_1, \dots, A_n nazveme množinu všech uspořádaných n -tic

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{[a_1, a_2, \dots, a_n]; a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Věta 1.1. *Necht' X je množina a \mathcal{A} je neprázdný systém množin. Pak platí*

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$$

a dále

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}.$$

1.2 Výrokový a predikátový počet

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice. Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A .

A	$\neg A$
0	1
1	0

Definice. Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

Definice. Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

Definice. Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**. Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A .

Definice. Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

(Platnost výroku) A je **nutnou a postačující podmínkou** (platnosti výroku) B .

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

————— Konec 1. přednášky, 3. 10. 2016 —————

Definice. Výrokovou formou budeme nazývat výraz

$$A(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

z něhož vznikne výrok dosazením prvků $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_m \in M_m$ z daných množin M_1, \dots, M_m .

Definice. Necht' $A(x), x \in M$, je výroková forma. Výrok

Pro všechna $x \in M$ platí $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M: A(x).$$

Symbol \forall nazýváme **obecným (velkým) kvantifikátorem**.

Definice. Necht' $A(x), x \in M$, je výroková forma. Výrok

Existuje $x \in M$, pro které platí $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M: A(x).$$

Symbol \exists nazýváme **existenčním (malým) kvantifikátorem**.

1.3 Zavedení množiny reálných čísel

Množinou reálných čísel \mathbf{R} budeme rozumět množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** (\leq), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

- I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah.
- II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení.
- III. Axiom infima.

Definice. Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená zdola**, jestliže existuje číslo $a \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$. Takové číslo a se nazývá **dolní závorou** množiny M . Analogicky definujeme pojmy **množina omezená shora** a **horní závora**. Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Axiom infima: Budiž M neprázdná zdola omezená množina. Potom existuje jediné číslo $g \in \mathbf{R}$, které má následující vlastnosti:

- (i) $\forall x \in M: x \geq g$,
- (ii) $\forall g' \in \mathbf{R}, g' > g \exists x \in M: x < g'$.

Číslo g značíme symbolem $\inf M$ a čteme **infimum** M .

Definice. Budiž $M \subset \mathbf{R}$. Číslo $G \in \mathbf{R}$ splňující

- (i) $\forall x \in M: x \leq G$,
- (ii) $\forall G' \in \mathbf{R}, G' < G \exists x \in M: x > G'$,

nazýváme **supremem** množiny M . Značíme ho symbolem $\sup M$.

————— Konec 2. přednášky, 7. 10. 2016 —————

Věta 1.2. *Necht' $M \subset \mathbf{R}$ je neprázdná shora omezená množina. Pak existuje právě jedno supremum množiny M .*

Definice. Budiž $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **největší prvek (maximum)** množiny M (značíme $\max M$), jestliže $a \in M$ a a je horní závorou množiny M . Analogicky definujeme **nejmenší prvek (minimum)** M , který značíme $\min M$.

Věta 1.3. *Pro každé $r \in \mathbf{R}$ existuje celá část čísla r , tj. číslo $k \in \mathbf{Z}$ takové, že $k \leq r < k + 1$. (Celou část čísla r značíme $[r]$).*

Věta 1.4. *Ke každému $x \in \mathbf{R}$ existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že platí $x < n$.*

Věta 1.5. *Ke každému $x \in (0, +\infty)$ a ke každému $n \in \mathbf{N}$ existuje právě jedno $y \in \mathbf{R}$, $y \geq 0$, splňující $y^n = x$.*

————— Konec 3. přednášky, 10. 10. 2016 —————

Věta 1.6. *Necht' $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Pak existuje $r \in \mathbf{Q}$ takové, že $a < r < b$.*

2 Posloupnosti reálných čísel

2.1 Úvod

Definice. Jestliže každému přirozenému číslu n je přiřazeno reálné číslo a_n , potom říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **posloupnost** reálných čísel. Číslo a_n nazveme **n -tým členem** této posloupnosti. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovna posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže platí $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, pokud je rostoucí či klesající.

2.2 Konvergence posloupnosti

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má **limitu** rovnou reálnému číslu A , jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Značíme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **konvergentní**, pokud existuje $A \in \mathbf{R}$ takové, že $\lim a_n = A$.

————— Konec 4. přednášky, 14. 10. 2016 —————

Věta 2.1 (jednoznačnost limity). *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Věta 2.2. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Definice. Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá **vybranou posloupností z** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta 2.3. *Necht' $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jestliže platí*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A \in \mathbf{R}, \text{ pak také } \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = A.$$

Věta 2.4 (aritmetika limit). *Necht' $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. Potom platí:*

- (i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,
- (ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,
- (iii) *je-li $B \neq 0$ a $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, je $\lim(a_n/b_n) = A/B$.*

————— Konec 5. přednášky, 17. 10. 2016 —————

Věta 2.5. *Necht' $\lim a_n = 0$ a necht' posloupnost $\{b_n\}$ je omezená. Potom $\lim a_n b_n = 0$.*

Věta 2.6 (limita a uspořádání). *Necht' $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$.*

- (i) *Necht' existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé přirozené $n \geq n_0$ je $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.*
- (ii) *Necht' $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé přirozené $n \geq n_0$ je $a_n < b_n$.*

————— Konec 6. přednášky, 21. 10. 2016 —————

Věta 2.7 (o dvou strážnících). *Bud'te $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dvě konvergentní posloupnosti a $\{c_n\}$ taková posloupnost, že platí:*

- (i) $\exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$,
- (ii) $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom existuje $\lim c_n$ a platí $\lim c_n = \lim a_n$.

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$, jestliže

$$\forall L \in \mathbf{R} \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : a_n \geq L.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$, jestliže

$$\forall K \in \mathbf{R} \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : a_n \leq K.$$

Věta 2.8 (aritmetika limit podruhé). *Necht' $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^*$ a $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^*$. Potom platí:*

- (i) $\lim (a_n \pm b_n) = A \pm B$, *pokud je pravá strana definována,*
- (ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je pravá strana definována,*
- (iii) $\lim a_n/b_n = A/B$, *pokud je pravá strana definována.*

Věta 2.9. *Necht' $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^*$, $A > 0$, $\lim b_n = 0$ a existuje $n_0 \in \mathbf{N}$, že pro každé $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n > 0$. Pak $\lim a_n/b_n = +\infty$.*

————— Konec 7. přednášky, 24. 10. 2016 —————

2.4 Hlubší věty o limitě posloupnosti

Věta 2.10. Každá monotónní posloupnost má limitu.

Věta 2.11 (Bolzano–Weierstrass). Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

———— Konec 8. přednášky, 31. 10. 2016 ————

3 Zobrazení

Definice. Necht' A a B jsou množiny. **Zobrazením množiny A do množiny B** nazveme předpis, kterým každému prvku x množiny A přiřadíme jediný prvek y z množiny B .

- Symbolem $f: A \rightarrow B$ značíme, že f je zobrazením množiny A do množiny B .
- Symbolem $f: x \mapsto f(x)$ značíme, že zobrazení f přiřazuje prvku x prvek $f(x)$.
- Množinu A z definice zobrazení nazýváme **definičním oborem zobrazení f** a značíme ji symbolem D_f .

Definice. Necht' A, B jsou neprázdné množiny a $f: A \rightarrow B$.

- Množina

$$f(A) = \{f(x); x \in A\}$$

se nazývá **obor hodnot** zobrazení f . (Značíme R_f nebo H_f .)

- **Obrazem** množiny $X \subset A$ při zobrazení f se nazývá množina

$$f(X) = \{f(x); x \in X\}.$$

- **Vzorem** množiny $Y \subset B$ při zobrazení f nazveme množinu

$$\{x \in A; f(x) \in Y\}.$$

Definice. Necht' A, B jsou neprázdné množiny a $f: A \rightarrow B$.

- Zobrazení f je **na**, jestliže $f(A) = B$.
- Zobrazení f je **prosté**, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

- Podmnožina $G_f = \{[x, y]; x \in A, y = f(x)\}$ kartézského součinu $A \times B$ se nazývá **grafem zobrazení f** .

Definice. Necht' $f: A \rightarrow B$ a $g: B \rightarrow C$ jsou dvě zobrazení. Symbolem $g \circ f$ označíme zobrazení množiny A do množiny C definované předpisem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Takto definované zobrazení se nazývá **složeným zobrazením**.

Definice. Necht' $f: A \rightarrow B$ je prosté a na. **Inverzním zobrazením** $f^{-1}: B \rightarrow A$ rozumíme zobrazení definované předpisem $f^{-1}: y \mapsto x$, kde x splňuje $f(x) = y$.

4 Funkce jedné reálné proměnné

4.1 Základní pojmy

Definice. Funkce f jedné reálné proměnné (dále jen **funkce**) je zobrazení $f: M \rightarrow \mathbf{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice. Funkce $f: J \rightarrow \mathbf{R}$ je **rostoucí** na intervalu J , jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Analogicky definujeme funkci **klesající (neklesající, nerostoucí)** na intervalu J .

Definice. **Monotónní funkcí** (resp. **ryze monotónní funkcí**) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na J .

Definice. Necht' f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická s periodou** $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $x+a \in D_f$, $x-a \in D_f$ a $f(x+a) = f(x-a) = f(x)$,
- **shora omezená** na M , jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- **zdola omezená** na M , jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- **omezená** na M , jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,
- **konstantní** na M , jestliže pro všechna $x, y \in M$ platí $f(x) = f(y)$.

4.2 Limita funkce

Definice. Necht' $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
- **prstencové okolí bodu** c jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$,

Okolí a prstencové okolí bodu $+\infty$ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

$$P(+\infty, \varepsilon) = B(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty), \\ P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

Definice. Řekneme, že číslo $A \in \mathbf{R}^*$ je **limitou funkce** f v **bodě** $c \in \mathbf{R}^*$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \forall x \in P(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

To označujeme symbolem $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$.

———— Konec 9. přednášky, 4. 11. 2016 ————

Definice. Necht' $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon \rangle$,
- **levé okolí bodu** c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$,
- **pravé prstencové okolí bodu** c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** c jako $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$.

Definice. Dále definujeme

- **levé okolí bodu** $+\infty$ jako $B^- (+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B^+ (-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** $+\infty$ jako $P^- (+\infty, \varepsilon) = B^- (+\infty, \varepsilon)$,
- **pravé prstencové okolí bodu** $-\infty$ jako $P^+ (-\infty, \varepsilon) = B^+ (-\infty, \varepsilon)$.

Definice. Necht' $A \in \mathbf{R}^*$, $c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A (značíme $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \forall x \in P^+(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Pro limitu zleva funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$.

Definice. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** c , jestliže $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Definice. Necht' $c \in \mathbf{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá zprava** (resp. **zleva**), jestliže $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$).

Definice. Necht' $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f : J \rightarrow \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu** J , jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J , pokud tento bod patří do J ,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J , pokud tento bod patří do J ,
- f je spojitá v každém vnitřním bodě J .

Věta 4.1. Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

Věta 4.2. Necht' funkce f má vlastní limitu v bodě $c \in \mathbf{R}^*$. Pak existuje $\delta > 0$, že f je na $P(c, \delta)$ omezená.

————— Konec 10. přednášky, 7. 11. 2016 —————

Věta 4.3 (aritmetika limit). Necht' $c \in \mathbf{R}^*$. Necht' $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbf{R}^*$ a $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = B \in \mathbf{R}^*$. Potom platí:

- (i) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = A + B$, pokud je výraz $A + B$ definován,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = AB$, pokud je výraz AB definován,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)/g(x) = A/B$, pokud je výraz A/B definován.

Věta 4.4. Necht' $c \in \mathbf{R}^*$. Necht' $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbf{R}^*$ a $A > 0$. Jestliže existuje $\eta > 0$ takové, že funkce g je kladná na $P(c, \eta)$, pak $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)/g(x)) = +\infty$.

Věta 4.5 (limita a uspořádání). Mějme $c \in \mathbf{R}^*$.

(i) Necht'

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) > \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

Pak existuje prstencové okolí $P(c, \delta)$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta) : f(x) > g(x).$$

(ii) Necht' existuje prstencové okolí $P(c, \delta)$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta) : f(x) \leq g(x).$$

Necht' existují $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$. Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

(iii) (o dvou strážnících) Necht' na nějakém prstencovém okolí $P(c, \delta)$ platí

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Necht' $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$. Potom existuje rovněž $\lim_{x \rightarrow c} h(x)$ a všechny tři limity jsou si rovny.

Věta 4.6. Necht' $c, D, A \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = D$, $\lim_{y \rightarrow D} f(y) = A$ a je splněna alespoň jedna z podmínek

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0 \forall x \in P(c, \eta) : g(x) \neq D$,

(S) f je spojitá v D .

Potom $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = A$.

————— Konec 11. přednášky, 11. 11. 2016 —————

Věta 4.7 (Heine). Necht' $c \in \mathbf{R}^*$, $A \in \mathbf{R}^*$ a funkce f je definována na prstencovém okolí bodu c . Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$.

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Věta 4.8. Budiž funkce f monotónní na (a, b) , $a, b \in \mathbf{R}^*$. Potom existují $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.

4.3 Funkce spojité na intervalu

Věta 4.9 (Bolzano). Budiž funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a předpokládejme, že $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f(\xi) = C$.

————— Konec 12. přednášky, 14. 11. 2016 —————

Lemma 4.10. Necht' $M \subset \mathbf{R}$ a platí

$$\forall x, y \in M \forall z \in \mathbf{R} : x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

Pak M je interval.

Věta 4.11. Necht' J je nedegenerovaný interval. Necht' funkce $f : J \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá na J . Potom je $f(J)$ interval.

Věta 4.12. Budiž f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom je f na $\langle a, b \rangle$ omezená shora i zdola.

Definice. Necht' $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) na M , jestliže platí

$$\forall y \in M: f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M: f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce f na množině M . Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

Definice. Necht' $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že funkce f má v bodě x

- **lokální maximum vzhledem k M** , jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M$: $f(y) \leq f(x)$,
- **lokální minimum vzhledem k M** , jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M$: $f(y) \geq f(x)$,

Věta 4.13. Necht' f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom funkce f nabývá na $\langle a, b \rangle$ své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).

————— Konec 13. přednášky, 21. 11. 2016 —————

Věta 4.14. Budiž f spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J . Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.

4.4 Zavedení elementárních funkcí

Věta 4.15 (zavedení logaritmu). Existuje jediná funkce (značíme ji \log a nazýváme ji **přirozeným logaritmem**), která má tyto vlastnosti:

(L1) $D(\log) = (0, +\infty)$ a na tomto intervalu je \log rostoucí,

(L2) $\forall x, y \in (0, +\infty): \log xy = \log x + \log y$,

(L3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$.

Definice. Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci \log . Budeme ji značit symbolem \exp .

————— Konec 14. přednášky, 25. 11. 2016 —————

Definice. Necht' $a, b \in \mathbf{R}$, $a > 0$. **Obecnou mocninu** a^b definujeme jako

$$a^b = \exp(b \log a).$$

Věta 4.16 (zavedení funkce sinus a čísla π). *Existuje jediné kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a jediná funkce **sinus** (budeme ji značit \sin), které mají následující vlastnosti:*

$$(S1) \quad D(\sin) = \mathbf{R},$$

$$(S2) \quad \sin \text{ je rostoucí na } \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle,$$

$$(S3) \quad \sin 0 = 0,$$

$$(S4) \quad \forall x, y \in \mathbf{R} : \sin(x + y) = \sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - y) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \sin y,$$

$$(S5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Definice. Funkci **kosinus** značíme \cos a definujeme předpisem

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Funkci **tangens** značíme tg a definujeme předpisem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

pro každé reálné x , pro něž má zlomek smysl, tj.

$$D_{\operatorname{tg}} = \{x \in \mathbf{R}; x \neq (2k + 1)\pi/2, k \in \mathbf{Z}\}.$$

A konečně symbolem cotg budeme značit funkci **kotangens**, která je definována na množině $D_{\operatorname{cotg}} = \{x \in \mathbf{R}; x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ předpisem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Věta 4.17. *Funkce \log , \exp , \sin , \cos , tg , cotg , \arcsin , \arccos , arctg a $\operatorname{arccotg}$ jsou spojité na svých definičních oborech.*

4.5 Derivace funkce

Definice. Necht' f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak

- **derivací funkce f v bodě a** budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h};$$

- **derivací funkce f v bodě a zprava** budeme rozumět

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h};$$

- derivací funkce f v bodě a zleva budeme rozumět

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

————— Konec 15. přednášky, 28. 11. 2016 —————

Věta 4.18. *Necht' funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.*

Věta 4.19 (aritmetika derivací). *Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí*

(i) $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a),$

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$

(iii) *je-li $g(a) \neq 0$, pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Věta 4.20 (derivace složené funkce). *Necht' funkce f má vlastní derivaci v bodě $y_0 \in \mathbf{R}$, funkce g má vlastní derivaci v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$ a $y_0 = g(x_0)$. Pak*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Věta 4.21 (derivace inverzní funkce). *Necht' funkce f je na intervalu (a, b) spojitá a rostoucí (resp. klesající). Necht' funkce f má v bodě $x_0 \in (a, b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí rovnost*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

————— Konec 16. přednášky, 2. 12. 2016 —————

Věta 4.22 (nutná podmínka lokálního extrému). *Budiž $x_0 \in \mathbf{R}$ bodem lokálního maxima nebo lokálního minima funkce f . Jestliže existuje $f'(x_0)$, potom je $f'(x_0) = 0$.*

Věta 4.23 (Rolle). *Necht' funkce f má následující vlastnosti:*

- (i) *je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,*
- (ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) ,*
- (iii) *platí, že $f(a) = f(b)$.*

Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f'(\xi) = 0$.

————— Konec 17. přednášky, 5. 12. 2016 —————

Věta 4.24 (Lagrange). *Necht' funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b) . Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta 4.25 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce). *Necht' $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Necht' f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\text{int } J$) má derivaci.*

- (i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \text{int } J$, pak f je rostoucí na J .*
- (ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \text{int } J$, pak f je klesající na J .*
- (iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \text{int } J$, pak f je neklesající na J .*
- (iv) *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \text{int } J$, pak f je nerostoucí na J .*

Věta 4.26 (l'Hospitalovo pravidlo). (i) *Necht' $a \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$, f a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak*

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) *Necht' $a \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow a+} |g(x)| = +\infty$, f a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak*

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta 4.27. *Necht' f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbf{R}$ a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost*

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x).$$

Definice. *Necht' $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$ a f má vlastní n -tou derivaci na okolí bodu a . Pak $(n + 1)$ -ní derivací funkce f v bodě a budeme rozumět*

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(a + h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

4.6 Konvexní a konkávní funkce

Definice. Necht' f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbf{R}$. Označme

$$T_a = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; y = f(a) + f'(a)(x - a)\}.$$

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ **leží pod tečnou** T_a , jestliže

$$f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že bod $[x, f(x)]$ **leží nad tečnou** T_a .

Definice. Necht' $f'(a) \in \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **inflexním bodem** funkce f , jestliže existuje $\Delta > 0$ takové, že platí

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a) : [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a ,

(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta) : [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a

nebo

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a) : [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a ,

(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta) : [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a .

————— Konec 18. přednášky, 9. 12. 2016 —————

Věta 4.28 (nutná podmínka pro inflexi). *Necht' $a \in \mathbf{R}$ je inflexní bod funkce f . Potom $f''(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.*

Věta 4.29 (postačující podmínka pro inflexi). *Necht' funkce f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b) a $z \in (a, b)$. Necht' platí:*

- $\forall x \in (a, z) : f''(x) > 0$,
- $\forall x \in (z, b) : f''(x) < 0$.

Potom z je inflexním bodem funkce f .

Definice. Řekneme, že funkce $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ je **konvexní na intervalu** I , jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I \forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Řekneme, že funkce $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ je **ryze konvexní na intervalu** I , jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2 \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Lemma 4.30. Funkce f je na intervalu I konvexní, právě když

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Věta 4.31. Necht' f má na intervalu (a, b) , $a < b$, spojitou první derivaci.

- (i) Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b) .
- (ii) Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b) .
- (iii) Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b) .
- (iv) Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konkávní na (a, b) .

4.7 Průběh funkce

Definice. Řekneme, že funkce $x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, je **asymptotou funkce** f v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0, \quad (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0).$$

Věta 4.32. Funkce f má v $+\infty$ asymptotu $x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, právě když

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbf{R}.$$

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.
2. Zjistíme průsečíky se souřadnými osami.
3. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicitu.
4. Dopočítáme limity v krajních bodech definičního oboru.
5. Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
6. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde funkce f je konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
7. Vypočteme asymptoty funkce.
8. Načrtneme graf funkce.