

1. Opakování středoškolské látky, výroková logika

1. Řešte následující nerovnice v \mathbf{R} :

$$\frac{x-2}{2x-8} \geq 1, \quad \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) \geq 0, \quad \frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}.$$

2. Nakreslete graf funkce: $f(x) = |||x| - 1| - 1| - 1|$.

3. Dokažte následující formulky:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = (1+2+3+\dots+n)^2,$$
$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \text{pro } x \in \mathbf{R}, x > -1, n \in \mathbf{N}.$$

4. Vyjádřete $\cos 5x$ (resp. $\sin 5x$) pouze pomocí funkcí $\cos x$ a $\sin x$.

5. Dokažte pro $a, b \in \mathbf{R}$: $|a+b| \leq |a|+|b|$, $||a|-|b|| \leq |a-b|$.

6. (i) Pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí $n \leq 2^n$. Dokažte!

(ii) Pro všechna $n \in \mathbf{N}$, $n \neq 3$, platí $n^2 \leq 2^n$. Dokažte!

7. Řešte rovnice:

$$\sin 2x = \sin x, \quad 2 \sin x + \cos x = 1, \quad \log(x^2 + 1) = 2 \log(3 - x).$$

8.* Sečtěte: $\sin x + \dots + \sin nx$.

9. Nechť M značí množinu všech mužů a Z značí množinu všech žen. Uvažujme následující výrokové funkce:

$S(m, z)$: „Muž m je manželem ženy z .“

$L_1(m, z)$: „Muž m miluje ženu z .“

$L_2(m, z)$: „Žena z miluje muže m .“

Pomocí kvantifikátorů, logických spojek a forem L_1 , L_2 a S vyjádřete následující tvrzení:

(i) Každý ženatý muž miluje svou manželku.

(ii) Existují nevěrné manželky.

(iii) Každou ženu miluje nějaký muž.

10. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace.

- $\forall x \in \mathbf{N} \exists y \in \mathbf{N} \forall z \in \mathbf{N} : (z > x \Rightarrow y < z)$
- $\forall a \in \mathbf{R} \exists \varepsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbf{R} \forall x \in \mathbf{R} : (x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1)$
- $\exists a \in \mathbf{R} \forall \varepsilon > 0 \forall \alpha \in \mathbf{R} \forall x \in \mathbf{R} : (x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1)$

11. Hádanky z ostrova poctivců a padouchů, kde poctivci mluví vždy pravdu a padouši vždy lžou:

(i) Jdete kolem tří obyvatel ostrova a zeptáte se: „Kolik je mezi vámi poctivců?“ A odpoví nezřetelně a tak se zeptáte obyvatele B: „Co říkal A?“ B odpoví: „A říkal, že mezi námi je jeden poctivec.“ Nato řekne C: „Nevěřte B, ten lže!“ Co jsou B a C?

(ii) Dejme tomu, že A řekne: „Já jsem padouch nebo B je poctivec.“ Co jsou A a B?

(iii) Dejme tomu, že A řekne: „Já jsem padouch, ale B ne.“ Co jsou A a B?

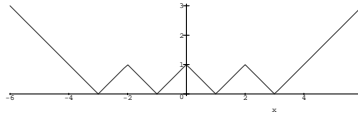
(iv) A řekne: „B a C mají stejnou povahu.“ Nato se někdo zeptá C: „Mají A a B stejnou povahu?“ Co C odpoví?

12. Nalezněte suprema a infima následujících množin (pokud existují):

- (i) $A = \{p/(p+q); p \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{N}\}$,
- (ii) $B = \{\sin x; x \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$,
- (iii) $C = \{n^2 - m^2; n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}\}$,
- (iv) $D = \{2^{-n} + 3^{-n}; n \in \mathbf{N}\}$,
- (v) $E = \{5^{(-1)^j 3^k}; j \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}\}$.

Výsledky a návody

1. $(4, 6); \langle 1, 2 \rangle; (-6, -3) \cup \left((-1 - \sqrt{13})/2, (-1 + \sqrt{13})/2 \right)$
- 2.



3. Použijte matematickou indukci.
4. Použijeme-li Moivreovy věty nebo součtových vzorců dostaneme:

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x,$$

$$\sin 5x = 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x.$$
5. První nerovnost dokažte užitím vhodné definice absolutní hodnoty nebo provedením diskuse znamének členů v absolutních hodnotách. Druhou nerovnost odvoďte z první.
6. Použijte matematickou indukci.
7. 1. rovnice: $x = k\pi$ nebo $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbf{Z}$; 2. rovnice: $x = 2k\pi$ nebo $x = \pi - \arcsin(4/5) + 2k\pi$, kde $k \in \mathbf{Z}$; 3. rovnice: $4/3$
8. Vhodným použitím Moivreovy věty a vzorce pro součet geometrické řady dostaneme:

$$\frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin(x/2)} \quad \text{pro } x \neq 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Pokud $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, pak je součet roven nule.

9.1. $\forall m \in M \forall z \in Z : S(m, z) \Rightarrow L_1(m, z)$

9.2.

$$\exists z_1, z_2 \in Z \exists m_1, m_2, m_3, m_4 \in M : z_1 \neq z_2 \ \& \ m_1 \neq m_2 \\ \& \ m_3 \neq m_4 \ \& \ S(m_1, z_1) \ \& \ L_2(m_2, z_1) \ \& \ S(m_3, z_2) \ \& \ L_2(m_4, z_2)$$

9.3. $\forall z \in Z \exists m \in M : L_1(m, z)$

10. 1. a 2. tvrzení platí, 3. tvrzení neplatí.

11.1. B je padouch a C je poctivec.

11.2. Oba jsou poctivci.

11.3. Oba jsou padouši.

11.4. „Ano.“

12. $\inf A = 0, \sup A = 1, \inf B = -1, \sup B = 1, \inf C$ neexistuje, $\sup C$ neexistuje, $\inf D = 0, \sup D = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \inf E = 0, \sup E$ neexistuje.