Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV

Termín číslo 3, 27. 6. 2018, LS 2017-18

---

1. Nalezněte všechna řešení diferenční rovnice

$$y(n+2) - 10y(n+1) + 24y(n) = 2^n,$$

splňující počáteční podmínky $y(1) = 1$, $y(2) = 1$.

(12 bodů)

2. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = y^4 \operatorname{tg} x.$$

splňující $y(\frac{\pi}{4}) = 1$.

(12 bodů)

3. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' - \frac{2y}{\sin 2x} = 2 \sin x.$$

(12 bodů)

4. Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y = x^2 \sin(x)$$

splňující počáteční podmínky $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

(12 bodů)

5. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 - t, \\ y_2' &= y_1 + y_2. \end{aligned}$$

Nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy splňující $y(0) = (0,0)^T$.

(12 bodů)

Výsledky

---

1. $y(n) = -\frac{5}{24}\, 6^n + \frac{1}{2}\, 4^n + \frac{1}{8}\, 2^n, \qquad n \in \mathbf{N}$

2. Pravá strana rovnice je definována pouze pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Vzhledem k počáteční podmínce budeme hledat maximální řešení, jehož definiční obor je obsažen v intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Označme $g(y) = y^4,\ y \in \mathbf{R}$, a $H(x) = \operatorname{tg} x, x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Opět vzhledem k počáteční podmínce budeme nejprve hledat řešení, která nabývají pouze kladných hodnot. Nalezneme příslušné primitivní funkce $G(y) = -\frac{1}{3y^3},\ y \in (0,\infty)$, a $H(x) = -\log\bigl(\cos(x)\bigr),\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pro hledané řešení tak dostáváme

$$-\frac{1}{3y^3} = -\log\bigl(\cos(x)\bigr) + c.$$

Díky počáteční podmínce můžeme určit $c = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\log 2$. Platí $c < 0$. Poněvadž $G((0,\infty)) = (-\infty, 0)$, musí platit $-\log(\cos(x)) + c < 0$, neboli $x \in (-\arccos(e^c), \arccos(e^c))$. Na tomto intervalu dostáváme řešení ve tvaru

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3\log\bigl(\cos(x)\bigr) + \frac{3}{2}\log(2) + 1}}$$

V krajních bodech uvažovaného intervalu má funkce příslušné jednostranné limity rovné $+\infty$, a proto jde o maximální řešení.

3. $y(x) = \frac{2\sin^2 x}{\cos x} + a \operatorname{tg} x, \qquad x \in (0, \pi/2) + k\pi/2,\ k \in \mathbf{Z},\ a \in \mathbf{R}$

4. $y(x) = -\frac{1}{6}(\cos x)x^3 + \frac{1}{4}(\cos x)x + \frac{1}{4}x^2 \sin x - \frac{1}{4}\sin x$

5. $y_1(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}e^x \sin x, \qquad y_2(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^x \cos x$