

11 Diferenční rovnice

Definice. Necht' $k \in \mathbf{N}$. **Lineární diferenční rovnici k -tého řádu s konstantními koeficienty** budeme rozumět rovnici

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = a_n, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (11.1)$$

kde neznámou je posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^\infty$, přičemž $p_1, \dots, p_k \in \mathbf{R}$, $p_k \neq 0$ jsou dána, stejně jako posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$.

Řešením rovnice (11.1) rozumíme každou posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^\infty$ splňující (1) pro každé $n \in \mathbf{N}$. Pokud chceme, aby řešení rovnice (11.1) splňovalo podmínky

$$y(1) = y_1, \dots, y(k) = y_k, \quad (11.2)$$

kde $y_1, \dots, y_k$ jsou dána (tzv. **počáteční podmínky**), pak hovoříme o **počáteční úloze**.

Pokud $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbf{N}$, pak (11.1) má tvar

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = 0, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (11.3)$$

Tato rovnice se nazývá **homogenní**.

Věta 11.1. *Počáteční úloha (11.1), (11.2) má právě jedno řešení.*

Věta 11.2. *Množina řešení rovnice (11.3) tvoří vektorový podprostor dimenze k prostoru všech reálných posloupností.*

Definice. **Charakteristickým polynomem** rovnice (11.1) budeme rozumět polynom

$$\lambda \mapsto \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \cdots + p_{k-1} \lambda + p_k.$$

————— Konec 1. přednášky, 17. 2. 2025 —————

Věta 11.3. *Necht' posloupnosti $\{y^1(n)\}_{n=1}^\infty, \{y^2(n)\}_{n=1}^\infty, \dots, \{y^k(n)\}_{n=1}^\infty$ tvoří fundamentální systém řešení (11.3). Necht' posloupnost $\{z(n)\}_{n=1}^\infty$ je řešením (11.1). Potom posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^\infty$ řeší (11.1), právě když existují konstanty $c_1, \dots, c_k \in \mathbf{R}$ takové, že*

$$y(n) = z(n) + c_1 y^1(n) + \cdots + c_k y^k(n)$$

pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Věta 11.4. *Necht' posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ v rovnici (11.1) splňuje*

$$a_n = \alpha^n (P(n) \cos(\nu n) + Q(n) \sin(\nu n)),$$

kde $\alpha > 0$, P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení (11.1) ve tvaru

$$y(n) = \alpha^n n^m (R(n) \cos(\nu n) + S(n) \sin(\nu n)),$$

kde R, S jsou vhodné polynomy stupně ne většího než $\max\{\text{stupeň } P, \text{stupeň } Q\}$ a $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ udává jakou násobnost má číslo $\alpha(\cos \nu + i \sin \nu)$ jakožto kořen charakteristického polynomu rovnice (11.1).

————— Konec 2. přednášky, 24. 2. 2025 —————

12 Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Definice. Diferenciální rovnici rozumíme rovnici tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'', y', y, x) = 0, \quad (12.1)$$

kde F je reálná funkce $n + 2$ proměnných.

Definice.

- **Řešením diferenciální rovnice** (12.1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I , která má v každém bodě intervalu I vlastní n -tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (12.1) v každém bodě intervalu I , tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y''(x), y'(x), y(x), x) = 0.$$

- Řešení y diferenciální rovnice (12.1) je **maximální**, pokud neexistuje takové řešení z , pro které $D_y \subsetneq D_z$ a které se na D_y shoduje s y .

Definice. Rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru

$$y' = g(y) \cdot h(x). \quad (12.2)$$

Metoda řešení pro spojitě g a h

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h .

2. Najdeme všechny nulové body funkce g . Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (12.2). Těmto řešením říkáme **singulární** nebo také **stacionární**.

3. Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g nenulová.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J . Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J . Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J . Existuje konstanta $c \in \mathbf{R}$ taková, že platí

$$G(y(x)) = H(x) + c$$

na definičním oboru řešení y , který nalezneme v následujícím kroku.

5. Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I; H(x) + c \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů musí mít řešení tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c),$$

kde G^{-1} značí funkci inverzní k funkci G . Ta existuje, neboť G je na intervalu J buď rostoucí nebo klesající.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení. Necht' y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (12.2), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c) , přičemž $b \in D_h$. Předpokládejme, že

$$\lim_{x \rightarrow b-} y_1(x) = \lim_{x \rightarrow b+} y_2(x) = \alpha \in D_g$$

Pak funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, b); \\ \alpha, & x = b; \\ y_2(x), & x \in (b, c); \end{cases}$$

je řešením rovnice (12.2) na intervalu (a, c) .

———— Konec 3. přednášky, 5. 3. 2018 ————

13 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (13.1)$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b) , $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$ (**lineární diferenciální rovnice prvního řádu**). **Homogenní diferenciální rovnici** budeme rozumět rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = 0. \quad (13.2)$$

Věta 13.1. Maximální řešení rovnice (13.1) splňující podmínku $y(x_0) = y_0$, kde $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbf{R}$, má tvar

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt \right) \cdot e^{-P(x)} + y_0 e^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),$$

kde P je primitivní funkce k p na (a, b) splňující $P(x_0) = 0$.

———— Konec 4. přednášky, 10. 3. 2025 ————

14 Lineární diferenciální rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(t), \quad (14.1)$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_0, \dots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b) (**lineární diferenciální rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty**).

Homogenní rovnici k rovnici (14.1) rozumíme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0. \quad (14.2)$$

Věta 14.1. Necht' $t_0 \in (a, b)$ a $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbf{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení y rovnice (14.1), které splňuje podmínky

$$y(t_0) = z_0, \quad y'(t_0) = z_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu (a, b) .

Věta 14.2.

- (i) Maximální řešení rovnice (14.2) jsou definována na celém $\mathbf{R}$ a tvoří vektorový podprostor prostoru $C^n(\mathbf{R})$ dimenze n .

(ii) Necht' y_p je maximální řešení rovnice (14.1). Pak funkce y je maximálním řešením (14.1), právě když ji lze zapsat ve tvaru $y = y_p + y_h$, kde y_h je vhodné řešení rovnice (14.2).

Definice. Bázi prostoru řešení rovnice (14.2) nazýváme **fundamentální systém**.

Definice. Charakteristickým polynomem rovnice (14.2) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

————— Konec 5. přednášky, 17. 3. 2025 —————

Lemma 14.3. Necht' $y_1, \dots, y_n$ tvoří fundamentální systém rovnice (14.2). Potom matice

$$U(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

je regulární pro každé $t \in \mathbf{R}$.

Věta 14.4. Necht'

$$f(t) = e^{\mu t} \cdot (P(t) \cos \nu t + Q(t) \sin \nu t),$$

kde $\mu, \nu \in \mathbf{R}$ a P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (14.1) ve tvaru

$$y_0(t) = t^m e^{\mu t} \cdot (R(t) \cos \nu t + S(t) \sin \nu t),$$

kde R, S jsou vhodné polynomy stupně ne většího než $\max\{\text{stupeň } P, \text{stupeň } Q\}$ a $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $\mu + i\nu$ jakožto kořen charakteristického polynomu.

15 Soustavy diferenciálních rovnic

15.1 Základní pojmy

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{15.1}$$

kde $f_i, i = 1, \dots, n$, jsou dané funkce definované na jisté neprázdné otevřené podmnožině $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.
Vektorový tvar:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)),$$

kde máme $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$, $\mathbf{x}'(t) = [x_1'(t), \dots, x_n'(t)]$ a dále $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_n]$.

Definice.

- **Řešením soustavy** (15.1) rozumíme vektorovou funkci $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $J \subset \mathbf{R}$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in J$ existují vlastní derivace $x_i'(t)$, $i = 1, \dots, n$, a platí (15.1).
- **Počáteční úlohou** pro (15.1) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení $\mathbf{x}$ soustavy (15.1) splňující navíc předem zadanou podmínku $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, kde $[t_0, \mathbf{x}^0] \in G$ (tzv. **počáteční podmínka**).

- **Maximální řešení** soustavy (15.1) je takové řešení $\mathbf{x}$ definované na intervalu J , které již nelze prodloužit, tj. je-li $\mathbf{y}$ řešení definované na intervalu I , $J \subset I$ a $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t)$ pro každé $t \in J$, pak $J = I$.

———— Konec 6. přednášky, 24. 3. 2025 ————

Věta 15.1 (Peano). *Necht' $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\mathbf{f}: G \rightarrow \mathbf{R}^n$ je spojitá na G . Pak pro každé $[t_0, \mathbf{x}^0] \in G$ existuje maximální řešení rovnice (15.1) splňující $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$.*

Věta 15.2 (Picard). *Necht' $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\mathbf{f}: G \rightarrow \mathbf{R}^n$ splňuje podmínku:*

(P) Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí, že f_i je spojitá na G a její parciální derivace podle druhé, třetí, $\dots$, $(n+1)$ -ní proměnné jsou spojitě na G .

Jestliže $[t_0, \mathbf{x}^0] \in G$, potom existuje právě jedno maximální řešení rovnice (15.1) splňující $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$.

15.2 Vlastnosti maximálních řešení

Věta 15.3 (opouštění kompaktu). *Necht' $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená, $K \subset G$ je kompaktní, zobrazení $\mathbf{f}$ je spojitě na G , $\mathbf{x}$ je maximální řešení rovnice (15.1) definované na intervalu (α, β) , $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $[t_0, \mathbf{x}(t_0)] \in K$. Pak existují $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$ a $\tau_2 \in (t_0, \beta)$ taková, že $[\tau_i, \mathbf{x}(\tau_i)] \notin K$, $i = 1, 2$.*

Věta 15.4 (spojitá závislost na počátečních podmínkách). *Necht' $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená a $\mathbf{f}$ splňuje podmínku (P) na G . Necht' $\mathbf{x}$ je maximální řešení soustavy (15.1) definované na (α, β) a $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Pak pro každé $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$, $\tau_2 \in (t_0, \beta)$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $\mathbf{y}$, které splňuje podmínku $\|\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| < \delta$, platí:*

- $\mathbf{y}$ je definováno v každém bodě intervalu $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$,
- $\forall t \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle: \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| < \varepsilon$.

15.3 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ x'_2 &= a_{21}(t)x_1 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{aligned} \tag{15.2}$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_{ij}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}$, $b_i: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, jsou spojitě funkce.

Vektorový tvar:

$$\mathbf{x}' = \mathbb{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t),$$

kde

$$\mathbb{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Věta 15.5 (o existenci a jednoznačnosti řešení). *Necht' $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{R}^n$. Necht' $\mathbb{A}: (\alpha, \beta) \rightarrow M(n \times n)$, $\mathbf{b}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení $\mathbf{x}$ soustavy (15.2) splňující $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$. Toto řešení je definováno na celém intervalu (α, β) .*

———— Konec 7. přednášky, 7. 4. 2025 ————

Definice. Homogenní soustavou k (15.2) rozumíme soustavu

$$\mathbf{x}' = \mathbb{A}(t)\mathbf{x}. \quad (15.3)$$

Věta 15.6. Necht' $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, a $\mathbb{A}: (\alpha, \beta) \rightarrow M(n \times n)$ je spojitě zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení soustavy (15.3) tvoří vektorový podprostor prostoru $C^1((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$. Dimenze tohoto podprostoru je rovna n .

Věta 15.7. Necht' $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$. Necht' $\mathbb{A}: (\alpha, \beta) \rightarrow M(n \times n)$, $\mathbf{b}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Necht' $\mathbf{y}$ je řešení (15.2) na intervalu (α, β) . Potom každé řešení $\mathbf{x}$ soustavy (15.2) na intervalu (α, β) má tvar $\mathbf{y} + \mathbf{z}$, kde $\mathbf{z}$ je jisté řešení (15.3).

Definice. Necht' vektorové funkce $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^n$ tvoří bázi prostoru řešení rovnice (15.3) na (α, β) . Takovou množinu řešení nazýváme **fundamentální systém** rovnice (15.3). Označme

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & \dots & y_1^n(t) \\ y_2^1(t) & \dots & y_2^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Matici Φ nazýváme **fundamentální maticí** soustavy (15.3).

Lemma 15.8. Necht' Φ je fundamentální matice soustavy (15.3). Pak $\Phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (\alpha, \beta)$.

Věta 15.9 (variací konstant). Necht' $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\mathbf{y}^0 \in \mathbb{R}^n$. Pak maximální řešení $\mathbf{y}$ rovnice (15.2) s počáteční podmínkou $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0$ má tvar

$$\mathbf{y}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{y}^0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s) ds, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

kde Φ je fundamentální matice soustavy (15.3).

15.4 Řešení lineárních soustav s konstantními koeficienty

Věta 15.10. Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ a vektorová funkce $\mathbf{y}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je řešením soustavy $\mathbf{y}' = \mathbb{A}\mathbf{y}$. Pak $\mathbf{y}$ je třídy C^∞ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\mathbf{y}^{(k)}(x) = \mathbb{A}^k \mathbf{y}(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Definice. Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ , nazýváme λ -maticí. **Řádkovými úpravami** λ -matice rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,
- přičtení $P(\lambda)$ -násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ .

Lemma 15.11. Necht' $\Lambda = (P_1, \dots, P_n)^T$ je λ -matice. Potom ji lze konečnou posloupností řádkových úprav převést na λ -matici $\tilde{\Lambda} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n)^T$, kde nejvýše jeden z polynomů $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ je nenulový.

————— Konec 8. přednášky, 14. 4. 2025 —————

Věta 15.12. Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Pak lze λ -matici $\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A}$ převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou λ -matici. Výsledná λ -matice má na diagonále nenulové polynomy, součet jejichž stupňů je n .

Označení.

- Necht' $P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ je polynom a $y: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je funkce mající vlastní derivaci n -tého řádu na $\mathbf{R}$. Potom symbol $P(\frac{d}{dx})y$ značí funkci $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$.
- Necht' $\mathbb{P} = (P_{ij})$ je λ -matice typu $n \times n$. Soustavou diferenciálních rovnic odpovídající $\mathbb{P}$ budeme rozumět soustavu

$$\begin{aligned} P_{11}(\frac{d}{dx})y_1 + \dots + P_{1n}(\frac{d}{dx})y_n &= 0, \\ &\vdots \\ P_{n1}(\frac{d}{dx})y_1 + \dots + P_{nn}(\frac{d}{dx})y_n &= 0. \end{aligned}$$

Věta 15.13. Necht' $\tilde{\mathbb{P}}$ vznikla konečnou posloupností řádkových úprav z λ -matice $\mathbb{P}$. Potom vektorová funkce $y: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ třídy C^∞ je řešením soustavy odpovídající matici $\mathbb{P}$, právě když je řešením soustavy odpovídající $\tilde{\mathbb{P}}$.

15.5 Stabilita řešení soustav diferenciálních rovnic

Budeme uvažovat rovnici

$$x'(t) = f(x(t)), \quad (15.4)$$

kde f je zobrazení definované na neprázdné otevřené množině $G \subset \mathbf{R}^n$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$. Soustavy tvaru (15.1) se nazývají **autonomní**.

V dalším budeme předpokládat, že $f \in C^1(G, \mathbf{R}^n)$, tj. složky $f_1, \dots, f_n$ zobrazení f jsou třídy C^1 na G .

Definice. Řekneme, že $a \in G$ je **stacionární bod rovnice** (15.1), jestliže $f(a) = 0$.

Definice. Řekneme, že stacionární bod $a \in G$ rovnice (15.1) je

- **stabilní**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení x rovnice (15.1) splňující $\|x(0) - a\| < \delta$ platí:
 - (a) definiční obor řešení x obsahuje interval $\langle 0, +\infty \rangle$;
 - (b) $\|x(t) - a\| < \varepsilon$ pro $t \in \langle 0, +\infty \rangle$;
- **nestabilní**, jestliže není stabilní,
- **asymptoticky stabilní**, jestliže je stabilní a navíc existuje $\Delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení x rovnice (15.1) splňující $\|x(0) - a\| < \Delta$ platí $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a$.

Věta 15.14. Necht' $A \in M(n \times n)$.

- **Stacionární bod** o rovnice $x' = Ax$ je **asymptoticky stabilní**, právě když $\Re \lambda < 0$ pro každé vlastní číslo λ matice A .
- **Stacionární bod** o rovnice $x' = Ax$ je **stabilní**, právě když $\Re \lambda \leq 0$ pro každé vlastní číslo λ matice A a pokud $\Re \lambda = 0$, pak násobnost λ je rovna $n - h(\lambda I - A)$.

Věta 15.15 (Ljapunov). Necht' $f \in C^1(G, \mathbf{R}^n)$ a a je stacionární bod rovnice (15.1). Označme

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i=1..n, j=1..n}.$$

Pak platí:

- Jestliže každé vlastní číslo matice $\mathbb{A}$ má zápornou reálnou část, pak $\mathbf{a}$ je asymptoticky stabilní bod rovnice (16.1).
- Jestliže alespoň jedno vlastní číslo matice $\mathbb{A}$ má kladnou reálnou část, pak je $\mathbf{a}$ nestabilní bod rovnice (16.1).