Miroslav Zelený

Deskriptivní teorie množin I

– Text k výběrové přednášce –

---

27. května 2019

Obsah

Předmluva

Následující text je mírně upraveným přepisem mých příprav k výběrové přednášce *Deskriptivní teorie množin I* a bude ještě dále upravován. Nejedná se tedy o skripta, neboť tato by vyžadovala řadu podstatných doplnění. Přesto snad tento text bude pomocí při absolvování výběrové přednášky v zimním semestru 2013/14.

Výklad se opírá zejména o [**2**].

M. Z.

KAPITOLA 1

Polské prostory

1.1. Definice a základní vlastnosti

Definice 1.1.1. Řekneme, že topologický prostor (X, τ) je **polský**, jestliže je separabilní a metrizovatelný úplnou metrikou.

Klasická deskriptivní teorie množin je část matematiky, která se zabývá „definovatelnými" množinami a zobrazeními v rámci polských prostorů.

Poznámka 1.1.2.

- Polský prostor je vždy dvojice (množina, topologie), zpravidla ale budeme říkat jen „polský prostor X".
- Úplná metrika na polském prostoru kompatibilní s jeho topologií není určena jednoznačně.
- Termín zavedl R. Godement ze skupiny Bourbaki. Používal ho však pro prostory metrické nikoliv topologické metrizovatelné.

Příklad 1.1.3 (příklady polských prostorů)**.**

- $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ s obvyklými topologiemi
- $2 := \{0, 1\}$, $\omega := \{0, 1, 2, \dots\}$, s diskrétními topologiemi
- separabilní Banachovy prostory
- metrizovatelné kompaktní prostory

Věta 1.1.4 (Baireova věta)**.** Nechť X je topologický prostor metrizovatelný úplnou metrikou. Potom průnik spočetně mnoha hustých otevřených množin v X je hustý v X. Tvrzení speciálně platí pro X polský.

Bez důkazu.

Věta 1.1.5. Nechť X je úplný metrický prostor a $(F_n)_{n\in\omega}$ je posloupnost neprázdných uzavřených podmnožin X splňující

- $\forall n \in \omega : \ F_{n+1} \subset F_n$,
- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$.

Potom existuje $x \in X$ takové, že $\bigcap_{n\in\omega} F_n = \{x\}$.

Bez důkazu

1.2. Další vlastnosti polských prostorů

Věta 1.2.1.

(i) Nechť X_n , $n \in \omega$, jsou polské. Pak $\prod_{n\in\omega} X_n$ (se součinovou topologií) je polský.

(ii) Nechť X je polský. Podprostor $H \subset X$ je polský právě tehdy, když H je typu G_δ v X, tj. $H = \bigcap_{n\in\omega} V_n$, kde V_n jsou otevřené množiny v X.

Důkaz. (i) Nechť d_n je úplná kompatibilní metrika na X_n, $n \in \omega$. Metriku d na $X := \prod_{n\in\omega} X_n$ definujeme takto

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \min\{2^{-n}, d_n(x_n, y_n)\}, \qquad x = (x_n),\ y = (y_n).$$

Ověření požadovaných vlastností je pak standardní i když ne krátkou záležitostí.

(ii) Pokud $H = \emptyset$ nebo $H = X$, pak tvrzení zřejmě platí. Budeme tedy v dalším předpokládat, že H je neprázdná vlastní podmnožina X.

$\Rightarrow$ Nechť ρ je úplná metrika na H. Pro $n \in \omega$ položme

$$V_n = \bigcup\{V \subset X;\ V \text{ je otevřená v } X, V \cap H \neq \emptyset, \operatorname{diam}_\rho(V \cap H) < 2^{-n}\}.$$

Ukážeme, že platí

$$H = \bigcap_{n\in\omega} (V_n \cap \overline{H}).$$

Inkluzi $\subseteq$ je snadné dokázat. Odvodíme inkluzi obrácenou. Pokud $x \in V_n \cap \overline{H}$ pro každé $n \in \omega$, tak existuje posloupnost G_n otevřených množin taková, že $x \in G_{n+1} \subset G_n$ a $\operatorname{diam}_\rho(G_n \cap H) < 2^{-n}$. Označme $\{y\} = \bigcap_{n\in\omega} \overline{G_n \cap H}^H$. Pokud by $x \neq y$, pak existuje otevřená množina $O \subset X$ taková, že $y \in O$ a $x \notin \overline{O}$. Nalezneme $n \in \omega$ takové, že $G_n \cap H \subset O$. Na druhé straně ale $G_n \cap (X \setminus \overline{O}) \cap H \neq \emptyset$, neboť $x \in G_n \cap (X \setminus \overline{O}) \cap \overline{H}$. To je ale spor.

Množina H je tedy spočetným průnikem G_δ množin, a tedy G_δ.

$\Leftarrow$ Nechť d je úplná metrika na X a $H = \bigcap_{n\in\omega} U_n$, kde $\emptyset \neq U_n \subsetneq X$ jsou otevřené v X. Položme $F_n = X \setminus U_n$ a

$$\tilde{d}(x,y) = d(x,y) + \sum_{n=0}^{\infty} \min\left\{2^{-n}, \left|\frac{1}{d(x,F_n)} - \frac{1}{d(y,F_n)}\right|\right\}, \qquad x,\ y \in H.$$

Funkce $\tilde{d}$ je metrika. Funkce je korektně definována, je symetrická a zřejmě $\tilde{d}(x,y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$. Pokud jde o trojúhelníkovou nerovnost, tato snadno plyne z nerovnosti

$$\left|\frac{1}{d(x,F_n)} - \frac{1}{d(y,F_n)}\right| \le \left|\frac{1}{d(x,F_n)} - \frac{1}{d(z,F_n)}\right| + \left|\frac{1}{d(z,F_n)} - \frac{1}{d(y,F_n)}\right|, \qquad x,\ y,\ z \in H.$$

Metrika $\tilde{d}$ je ekvivalentní s d. Pokud $x_j \xrightarrow{d} x$, pak platí $d(x_j, F_n) \to d(x, F_n)$ pro každé $n \in \omega$. Odtud a z definice $\tilde{d}$ již snadno plyne $x_j \xrightarrow{\tilde{d}} x$. Pokud $x_j \xrightarrow{\tilde{d}} x$, pak zřejmě $x_j \xrightarrow{d} x$.

Prostor $(H,\tilde{d})$ je úplný. Nechť (x_i) je cauchyovská v $(H,\tilde{d})$. Potom (x_i) je cauchyovská v (X,d) a existuje $x \in X$ takové, že $x_i \to x$. Pro každé $n \in \omega$ je posloupnost $(1/d(x_i,F_n))_i$ cauchyovská, a tedy konvergentní v $\mathbf{R}$. Odtud již snadno plyne $x \in H$ a $x_i \xrightarrow{\tilde{d}} x$.

Prostor $(H,\tilde{d})$ je separabilní. Zřejmé. ∎

Označení 1.2.2. Nechť A je neprázdná množina. Symbol $A^{<\omega}$ značí množinu všech konečných posloupností prvků z A (včetně prázdné). Je-li $s = (s_0, \dots, s_{k-1}) \in A^k \subset A^{<\omega}$ a $t = (t_0, t_1, \dots) \in A^{<\omega} \cup A^\omega$, pak **spojení** posloupností s a t definujeme jako

$$s^\wedge t := (s_0, \dots, s_{k-1}, t_0, t_1, \dots).$$

Délkou posloupnosti $s \in A^\omega$ rozumíme počet členů s; značíme $|s|$. Nechť $s \in A^{<\omega} \cup A^\omega$. Potom $s|k$ značí restrikci s na $k \in \omega$, přičemž $|s| \geq k$ nebo $s \in A^\omega$.

Je-li $s \in A^{<\omega}$ a $t \in A^{<\omega} \cup A^\omega$, říkáme, že t **prodlužuje** s, jestliže $s = t||s|$; značíme $s \prec t$.

1.3. Baireův prostor ω^ω

Na prostoru ω^ω uvažujeme součinovou topologii, přičemž na ω máme topologii diskrétní. Nechť $s \in \omega^{<\omega}$. Pak označíme

$$\mathcal{N}(s) = \{\nu \in \omega^\omega;\ |s| = |t| \ \&\ s \prec \nu\};$$

jde o takzvaný **Baireův interval**.

Platí:

- ► Množina $\mathcal{N}(s)$, $s \in \omega^{<\omega}$, je obojetná, tj. otevřená i uzavřená. Platí totiž

$$\omega^\omega \setminus \mathcal{N}(s) = \bigcup \{\mathcal{N}(t);\ |t| = |s|, s \neq t\}.$$

- ► Přímo z definice součinové topologie plyne, že systém $\{\mathcal{N}(s);\ s \in \omega^{<\omega}\}$ tvoří bázi ω^ω.

Věta 1.3.1 (Alexandrov-Urysohn)**.** Prostor ω^ω je až na homeomorfismus jediným neprázdným nuldimenzionálním polským prostorem, jehož všechny kompaktní množiny mají prázdný vnitřek.

Bez důkazu.

Důsledek 1.3.2. Prostor ω^ω je homeomorfní s prostorem $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Věta 1.3.3. Nechť X je neprázdný polský prostor. Pak existuje spojité zobrazení ω^ω na X.

Důkaz. Nechť ρ je úplná metrika na X splňující $\operatorname{diam}_\rho X \leq 1$. Zkonstruujeme neprázdné uzavřené množiny F_s, $s \in \omega^{<\omega}$, takové, že

(1) $F_\emptyset = X$,
(2) $\forall s \in \omega^{<\omega}$: $\operatorname{diam} F_s \leq 2^{-|s|}$,
(3) $\forall s \in \omega^{<\omega}$: $\bigcup_{n\in\omega} F_{s^\wedge n} = F_s$.

Konstrukce systému $\{F_s;\ s \in \omega^{<\omega}\}$.

• $s = \emptyset$: Položíme $F_\emptyset = X$.

• Předpokládejme, že F_s již máme, a chceme zkonstruovat $F_{s^\wedge n}$ pro $n \in \omega$. Prostor X je separabilní, a proto F_s je separabilní. Nalezneme množinu[1] $\{x_n;\ n \in \omega\}$ hustou v F_s. Položíme

$$F_{s^\wedge n} := F_s \cap \overline{B}(x_n, 2^{-(|s|+2)}).$$

Tím je konstrukce provedena a (1)-(3) zřejmě platí.

Definice zobrazení φ. Definujme hledané $\varphi : \omega^\omega \to X$ takto

$$\{\varphi(\alpha)\} = \bigcap_{n\in\omega} F_{\alpha|n}.$$

[1] Množina $\{x_n;\ n \in \omega\}$ může být i jednoprvková.

Korektnost definice φ. Posloupnost $(F_{\alpha|n})_n$ je tvořena do sebe zařazenými uzavřenými množinami splňujícími $\operatorname{diam} F_{\alpha|n} \to 0$ (vlastnost (2)). Podle Věty 1.1.5 je množina $\bigcap_{n\in\omega} F_{\alpha|n}$ jednoprvková.

Spojitost φ. Nechť $\alpha \in \omega^\omega$ a $\varepsilon > 0$. Platí $\varphi(\mathcal{N}(\alpha|k)) \subset F_{\alpha|k}$ pro každé $k \in \omega$. Pro $k \in \omega$ splňující $2^{-k} < \varepsilon$, pak máme

$$\operatorname{diam} \varphi(\mathcal{N}(\alpha|k)) \leq \operatorname{diam} F_{\alpha|k} \leq 2^{-k} < \varepsilon.$$

Surjektivita φ. Je-li $s \in \omega^{<\omega}$ a $x \in F_{s|n}$, pak podle (3) existuje $n \in \omega$ takové, že $x \in F_{s^\wedge n}$. Pro libovolné $x \in X$ tedy existuje $\alpha \in \omega^\omega$ takové, že $x \in F_{\alpha|k}$ pro všechna $k \in \omega$. Pak máme $\varphi(\alpha) = x$. ■

1.4. Cantorův prostor 2^ω

Prostor 2^ω je opatřen součinovou topologií. Jedná se o kompaktní, nuldimenzionální prostor, který je také polský.

Věta 1.4.1 (Brouwer)**.** Cantorův prostor 2^ω je až na homeomorfismus jediným neprázdným nuldimenzionálním kompaktním metrizovatelným prostorem bez izolovaných bodů.

Bez důkazu.

Věta 1.4.2. Nechť X je neprázdný metrizovatelný kompaktní prostor. Pak existuje spojité zobrazení 2^ω na X.

Důkaz lze provést podobně jako důkaz Věty 1.3.3.

1.5. Hilbertova krychle $[0,1]^\omega$

Prostor $[0,1]^\omega$ je opatřen součinovou topologií, přičemž na $[0,1]$ uvažujeme obvyklou topologii. Prostor $[0,1]^\omega$ je kompaktní metrizovatelný, a tedy polský.

Věta 1.5.1. Každý polský prostor je homeomorfní G_δ podmnožině $[0,1]^\omega$.

Důkaz. Nechť X je polský a neprázdný, případ $X = \emptyset$ je triviální. Zvolme úplnou kompatibilní metriku ρ na X splňující $\operatorname{diam}_\rho X \leq 1$. Nalezněme spočetnou hustou množinu $\{x_n;\ n \in \omega\}$ v X. Definujme $f : X \to [0,1]^\omega$ takto:

$$f(x) = (\rho(x, x_n))_{n\in\omega}.$$

Korektnost definice a spojitost f. Zřejmé.

Injektivita f. Pokud $x \neq y$, pak existuje $n \in \omega$ takové, že $\rho(x, x_n) < \rho(y, x_n)$, a tedy $f(x) \neq f(y)$.

Spojitost f^{-1}. Nechť $f(y^n) \to f(y)$. Máme ukázat, že také $y^n \to y$. Víme, že $\rho(y^n, x_k) \to \rho(y, x_k)$ pro každé $k \in \omega$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $k \in \omega$ takové, že $\rho(y, x_k) < \varepsilon/3$. Pro jisté $n_0 \in \omega$ platí

$$\forall n \in \omega, n \geq n_0 :\ \rho(y^n, x_k) < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Pak máme

$$\forall n \in \omega, n \geq n_0 :\ \rho(y^n, y) \leq \rho(y^n, x_k) + \rho(x_k, y) < \varepsilon.$$

Množina $f(X)$ je G_δ. Prostor $f(X)$ je homeomorfní s X, a je tedy polský. Podle Věty 1.2 je $f(X)$ typu G_δ v $[0,1]^\omega$. ■

1.6. Prostor kompaktních množin $\mathcal{K}(X)$

Nechť X je polský. Označme

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subset X;\ K \text{ je kompaktní}\}.$$

Vietorisova topologie na $\mathcal{K}(X)$ je generována množinami tvaru

$$\{K \in \mathcal{K}(X);\ K \cap V \neq \emptyset\} \quad \text{a} \quad \{K \in \mathcal{K}(X);\ K \subset V\},$$

kde $V \subset X$ je otevřená.

Poznámka 1.6.1. Množiny tvaru

$$\{K \in \mathcal{K}(X);\ K \subset V_0, K \cap V_i \neq \emptyset, i = 1, \ldots, n\},$$

kde $n \in \omega$, V_0, V_1, …, V_n jsou otevřené podmnožiny X, tvoří bázi Vietorisovy topologie.

Věta 1.6.2. Nechť X je polský a ρ je kompatibilní úplná metrika na X splňující $\operatorname{diam}_\rho X \leq 1$. Pak zobrazení $h : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \to [0, +\infty)$ definované předpisem

$$h(K, L) = \begin{cases} \max\{\sup_{x \in K} \rho(x, L), \sup_{y \in L} \rho(y, K)\}, & K \neq \emptyset, L \neq \emptyset; \\ 0, & K = L = \emptyset; \\ 1, & \text{jinak}; \end{cases}$$

je úplná metrika na $\mathcal{K}(X)$ kompatibilní s Vietorisovou topologií. Tato metrika se nazývá **Hausdorffova**.

Důkaz. Zobrazení h je metrika. Stačí ověřit trojúhelníkovou nerovnost, korektnost a ostatní vlastnosti jsou zřejmé. Nechť $K, L, P \in \mathcal{K}(X)$. Pokud je některý z kompaktů K, L, P prázdný, pak zřejmě

$$h(K, L) \leq h(K, P) + h(P, L). \tag{1}$$

Dokážeme (1) i pro případ neprázdných kompaktů. Nechť $x \in K$, $y \in L$ a $p \in P$. Postupně odhadujme:

$$\begin{aligned} \rho(x, L) &\leq \rho(x, y) \leq \rho(x, p) + \rho(p, y), \\ \rho(x, L) &\leq \rho(x, p) + \rho(p, L), \\ \rho(x, L) &\leq \rho(x, p) + h(P, L), \\ \rho(x, L) &\leq h(K, P) + h(P, L). \end{aligned}$$

Odtud již snadno plyne dokazovaná nerovnost.

Kompatibilita s Vietorisovou topologií. Označme Vietorisovu topologii jako $\mathcal{V}$ a topologii indukovanou Hausdorffovou metrikou jako $\mathcal{H}$. Chceme dokázat $\mathcal{H} = \mathcal{V}$.
Inkluze $\mathcal{H} \subset \mathcal{V}$. Zvolme $K \in \mathcal{K}(X)$ a $\varepsilon > 0$. Množina K je kompaktní, takže můžeme nalézt konečný systém $\mathcal{B}$ otevřených koulí protínajících K s diametrem menším než ε, který pokrývá K. Potom platí

$$B_h(K, \varepsilon) \supset \{L \in \mathcal{K}(X);\ L \subset \bigcup \mathcal{B} \text{ a } \forall B \in \mathcal{B} :\ L \cap B \neq \emptyset\} \ni K.$$

Inkluze $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$. Nechť $V \subset X$ je otevřená a $K \in \mathcal{K}(X)$ splňuje $K \cap V \neq \emptyset$. Zvolme $x \in K \cap V$ a k němu nalezněme $\varepsilon > 0$ takové, že $B(x, \varepsilon) \subset V$. Potom

$$B_h(K, \varepsilon) \subset \{L \in \mathcal{K}(X);\ L \cap V \neq \emptyset\}.$$

Nyní nechť $V \subset X$ je otevřená a $K \in \mathcal{K}(X)$, $K \neq \emptyset$, splňuje $K \subset V$. Nalezneme $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\{y \in X;\ \rho(y, K) < \varepsilon\} \subset V.$$

Potom platí

$$B_h(K, \varepsilon) \subset \{L \in \mathcal{K}(X);\ L \subset V\}.$$

Pro $K = \emptyset$ stačí položit $\varepsilon = 1/2$.

Separabilita $\mathcal{K}(X)$. Nalezněme $D \subset X$ spočetnou a hustou. Položme

$$\mathcal{D} := \{K \in \mathcal{K}(X);\ K \text{ je konečná a } K \subset D\}.$$

Množina $\mathcal{D}$ je spočetná. Jestliže $V_0, V_1, \dots, V_n$ jsou otevřené podmnožiny X takové, že

$$\mathcal{G} := \{K \in \mathcal{K}(X);\ K \subset V_0 \text{ a } K \cap V_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, n\}$$

je neprázdná, pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ zvolme $x_i \in V_0 \cap V_i \cap D$ a položme $L := \{x_1, \dots, x_n\}$. Potom $L \in \mathcal{G} \cap \mathcal{D}$, takže $\mathcal{D}$ je hustá v $\mathcal{K}(X)$.

Úplnost $(\mathcal{K}(X), h)$. Nechť (K_n) je cauchyovská posloupnost v $(\mathcal{K}(X), h)$. Položme

$$K := \bigcap_{n \in \omega} \overline{\bigcup_{j \geq n} K_j}.$$

Odvodíme:

(1) $K \in \mathcal{K}(X)$,
(2) $K_n \to K$.

(1) Stačí ukázat, že množina $\bigcup_{n \in \omega} K_n$ je totálně omezená, pak je totiž množina $\overline{\bigcup_{n \in \omega} K_n}$ kompaktní. Vezměme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $n_0 \in \omega$ takové, že

$$\forall n \in \omega,\ n \geq n_0 :\ h(K_n, K_{n_0}) < \varepsilon/2.$$

Nechť S je konečná $\varepsilon/2$-síť v K_{n_0}. Potom

$$\bigcup_{n \geq n_0} K_n \subset \{y \in X;\ \rho(y, K_{n_0}) < \varepsilon/2\}.$$

Odtud plyne, že S je ε-síť $\bigcup_{n \geq n_0} K_n$. Existuje tedy ε-konečná síť množiny $\bigcup_{n \in \omega} K_n$, protože $\bigcup_{n < n_0} K_n$ je kompaktní.

(2) Nechť množina V je otevřená v X a $K \subset V$. Platí $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\bigcup_{j \geq n} K_j} \cap V^c = K \cap V^c = \emptyset$, a tedy existuje $n_0 \in \omega$ takové, že

$$\overline{\bigcup_{j \geq n_0} K_j} \subset V.$$

Pro $n \geq n_0$ tedy platí $K_n \subset V$.

Nyní nechť množina $V \subset X$ je opět otevřená a $K \cap V \neq \emptyset$. Nalezneme $\varepsilon > 0$ a $x \in K \cap V$ takové, že $B(x, \varepsilon) \subset V$. K tomuto ε nalezneme $n_0 \in \omega$ takové, že

$$\forall n, m \geq n_0 :\ h(K_n, K_m) < \varepsilon/2.$$

Dále existuje $m_0 \geq n_0$ takové, že $K_{m_0} \cap B(x, \varepsilon/2) \neq \emptyset$. Potom pro každé $n \geq m_0$ platí $K_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$, a tedy $K_n \cap V \neq \emptyset$. ■

1.7. Rozšiřování spojitých zobrazení

Věta 1.7.1 (Kuratowski). Nechť X je metrický prostor, Y je úplný metrický prostor, $A \subset X$ a $f : A \to Y$ je spojité zobrazení. Potom existuje G_δ množina G taková, že $A \subset G \subset \overline{A}$, a spojité rozšíření $g : G \to Y$ zobrazení f.

Důkaz. Definujme oscilaci zobrazení f v bodě $x \in \overline{A}$ takto

$$\operatorname{osc}(f, x) = \inf\{\operatorname{diam} f(U);\ U \text{ je okolí } x\}.$$

Pro $x \in A$ platí $\operatorname{osc}(f, x) = 0$. Položme

$$G = \{x \in \overline{A};\ \operatorname{osc}(f, x) = 0\}.$$

Ověříme požadované vlastnosti.

- *Inkluze $A \subset G \subset \overline{A}$.* Tato vlastnost zřejmě platí.
- *Množina G je typu G_δ.* Plyne z rovnosti

$$G = \bigcap_{n \in \omega} \{x \in \overline{A};\ \operatorname{osc}(f, x) < 1/n\},$$

neboť $\{x \in \overline{A};\ \operatorname{osc}(f, x) < 1/n\}$ je otevřená v $\overline{A}$.

Zobrazení g definujeme takto

$$\{g(x)\} = \bigcap_{k \in \omega} \overline{f(B(x, 2^{-k}))}, \qquad x \in G.$$

- *Korektnost definice g* plyne z Věty 1.1.5.
- *Spojitost g* plyne z rovnosti $\operatorname{osc}(g, x) = \operatorname{osc}(f, x) = 0$ pro $x \in G$.
- *Zobrazení g rozšiřuje f.* Snadné. ■

Věta 1.7.2 (Lavrentěv). Nechť X, Y jsou úplné metrické prostory, $A \subset X$, $B \subset Y$ a $f : A \to B$ je homeomorfismus A na B. Pak existují G, H typu G_δ takové, že $A \subset G \subset X$, $B \subset H \subset Y$, a $\tilde{f} : G \to H$ homeomorfismus G na H splňující $\tilde{f}|_A = f$.

Důkaz. Podle Věty 1.7.1 existuje G_1 typu G_δ a spojité zobrazení $f_1 : G_1 \to Y$ takové, že $A \subset G_1$ a $f_1|A = f$. Podobně nalezneme H_1 typu G_δ a spojité zobrazení $g_1 : H_1 \to X$ takové, že $B \subset H_1$ a $g_1|B = f^{-1}$.

Označme

$$R := \{(x, y) \in G_1 \times Y;\ f_1(x) = y\},$$
$$S := \{(x, y) \in X \times H_1;\ x = g_1(y)\}.$$

Položíme $G := \pi_X(R \cap S)$, $H := \pi_Y(R \cap S)$ a $\tilde{f} := f_1|G$. Zřejmě $\tilde{f}^{-1} = g_1|H$, a tedy $\tilde{f}$ je homeomorfismus G na H.

Zobrazení $\psi(x) = (x, f_1(x))$ je spojité na G_1, S je uzavřená v $X \times H_1$ a $G = \psi^{-1}(S)$. Množina G je tedy typu G_δ v X. Podobně lze odvodit, že H je typu G_δ v Y. ■

1.8. Cvičení

Cvičení 1. Dokažte, že na každém úplném metrickém prostoru existuje ekvivalentní úplná metrika, která je omezená.

Cvičení 2. Dokažte Větu 1.4.2.

Cvičení 3. Je-li X kompaktní metrizovatelný prostor, pak $\mathcal{K}(X)$ je kompaktní.

Cvičení 4. Ukažte, že prostory

(i) $\{K \in \mathcal{K}(\mathbf{R});\ \lambda(K) = 0\}$ (λ značí Lebesgueovu míru),

(ii) $\{K \in \mathcal{K}(X);\ K$ je řídká$\}$, kde X je polský,

jsou polské.

Cvičení 5. Ukažte, že prostory $(2^\omega)^\omega$, $2^{\omega\times\omega}$ a 2^ω jsou homeomorfní.

Cvičení 6. Ukažte, že množina $\{\pi \in \omega^\omega;\ \pi$ je permutace$\}$ je polský.

Cvičení 7. Řekneme, že $T \subset \omega^{<\omega}$ je **strom**, jestliže pro každé $t \in \omega^{<\omega}, s \in T$, $t \prec s$, platí $t \in T$. Ukažte, že prostor $\{T \in 2^{(\omega^{<\omega})};\ T$ je strom$\}$ je kompaktní.

Cvičení 8. Nalezněte $\varphi : \omega^\omega \to 2^\omega$ takové, že φ je homeomorfismus ω^ω a $\varphi(\omega^\omega)$.

Cvičení 9 (Tietze)**.** Nechť X je metrizovatelný prostor, $F \subset X$ je uzavřená v X a $f : F \to \mathbf{R}$ je spojitá. Dokažte, že f lze spojitě rozšířit na X. Dokažte.

Cvičení 10 (Kirszbraunn)**.** Nechť X je metrický prostor, $F \subset X$ a $f : F \to \mathbf{R}$ je lipschitzovská. Dokažte, že f lze lipschitzovsky rozšířit na X.

KAPITOLA 2

Základní vlastnosti borelovských a analytických množin

2.1. Zavedení borelovské hierarchie a její vlastnosti

Definice 2.1.1. Nechť X je metrizovatelný prostor. Pro každé ordinální číslo $1 \leq \xi < \omega_1$ definujeme systémy množin $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(X)$ a $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi(X)$ induktivně takto:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Sigma}^0_1(X) = \{U \subset X;\ U \text{ je otevřená množina}\},\\
&\boldsymbol{\Pi}^0_\xi(X) = \{A \subset X;\ X \setminus A \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(X)\},\\
&\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(X) = \left\{\bigcup_{n\in\omega} A_n;\ A_n \in \boldsymbol{\Pi}^0_{\xi_n}(X), \xi_n < \xi \text{ pro } n \in \omega\right\}, \qquad \xi > 1.
\end{aligned}$$

Dále označme $\boldsymbol{\Delta}^0_\xi(X) := \boldsymbol{\Pi}^0_\xi(X) \cap \boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(X)$. Množinu A ze systému $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(X)$ (resp. $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi(X)$, $\boldsymbol{\Delta}^0_\xi(X)$) nazýváme množinou aditivní třídy ξ (resp. multiplikativní třídy ξ, obojetné třídy ξ) v X.

Vzhledem k tomu, že námi uvažovaný prostor X je metrizovatelný, platí $\boldsymbol{\Sigma}^0_1(X) \subset \boldsymbol{\Sigma}^0_2(X)$. Potom již přímo z definice dostáváme $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(X) \subset \boldsymbol{\Sigma}^0_\eta(X)$ a $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi(X) \subset \boldsymbol{\Pi}^0_\eta(X)$ kdykoliv $1 \leq \xi < \eta < \omega_1$. Odtud opětovným použitím definice dostáváme $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(X) \cup \boldsymbol{\Pi}^0_\xi(X) \subset \boldsymbol{\Delta}^0_\eta(X)$, kde $1 \leq \xi < \eta < \omega_1$.

Poznámka 2.1.2. Pokud prostor X obsahuje homeomorfní kopii 2^ω, pak jsou všechny uvedené inkluze ostré.

Označme Borel(X) σ-**algebru borelovských množin**. Platí

$$\mathrm{Borel}(X) = \bigcup_{1\leq\xi<\omega_1} \boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(X) = \bigcup_{1\leq\xi<\omega_1} \boldsymbol{\Pi}^0_\xi(X) = \bigcup_{1\leq\xi<\omega_1} \boldsymbol{\Delta}^0_\xi(X).$$

Poznámka 2.1.3.

(i) Platí: $F_\sigma = \boldsymbol{\Sigma}^0_2$, $G_\delta = \boldsymbol{\Pi}^0_2$, $F_{\sigma\delta} = \boldsymbol{\Pi}^0_3$, $G_{\delta\sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^0_3$

(ii) Z definice a de Morganových pravidel vyplývá, že $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$ je uzavřená na spočetná sjednocení a $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi$ na spočetné průniky. Odtud pochází také terminologie.

Věta 2.1.4. Nechť X je metrizovatelný prostor a $1 \leq \xi < \omega_1$.

(i) Systém $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(X)$ je uzavřený na konečné průniky.

(ii) Systém $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi(X)$ je uzavřený na konečná sjednocení.

Důkaz. (i) Pro $\xi = 1$ tvrzení platí, neboť jde o základní vlastnost topologie. Nechť nyní $A, B \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$ a $\xi > 1$. Podle definice můžeme psát:

$$A = \bigcup_{n\in\omega} A_n, \qquad A_n \in \boldsymbol{\Pi}^0_{\xi_n}(X), \qquad \xi_n < \xi;$$
$$B = \bigcup_{m\in\omega} B_m, \qquad B_m \in \boldsymbol{\Pi}^0_{\eta_m}(X), \qquad \eta_m < \xi.$$

Pak máme

$$A \cap B = \bigcup_{(n,m)\in\omega^2} A_n \cap B_m \qquad \text{a} \qquad A_n \cap B_m \in \boldsymbol{\Pi}^0_{\max\{\xi_n,\eta_m\}}(X),$$

a tedy $A \cap B \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(X)$. Odtud již snadno plyne dokazované tvrzení.

(ii) Tvrzení plyne z (i) užitím de Morganova pravidla. ■

Poznámka 2.1.5. Nechť X je metrizovatelný prostor. Potom je σ-algebra borelovských množin nejmenším systémem, který obsahuje všechny otevřené podmnožiny X a je uzavřený na spočetná sjednocení a spočetné průniky.

Věta 2.1.6. Nechť X je metrizovatelný prostor, $A \subset Z \subset X$ a $1 \le \xi < \omega_1$. Pak $A \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(Z)$ právě tehdy, když existuje $\tilde{A} \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(X)$ takové, že $A = \tilde{A} \cap Z$. Analogické tvrzení platí i pro multiplikativní třídy.

Důkaz. Pro $\alpha = 1$ plyne požadované tvrzení z definice topologie na podprostoru. Pro ostatní α obdržíme tvrzení transfinitní indukcí. ■

Věta 2.1.7. Nechť X, Y jsou metrizovatelné prostory a $f : X \to Y$ je spojité. Jestliže $A \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha(Y)$ (resp. $\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha(Y)$, $\boldsymbol{\Delta}^0_\alpha(Y)$), pak $f^{-1}(A) \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha(X)$ (resp. $\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha(X)$, $\boldsymbol{\Delta}^0_\alpha(X)$).

Důkaz. Pro $\boldsymbol{\Sigma}^0_1, \boldsymbol{\Pi}^0_1$ tvrzení platí – jde o základní vlastnost spojitých zobrazení. Pokud tvrzení platí pro každé $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(Y)$, $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi(Y)$, $\xi < \alpha$, a máme $A \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha(Y)$, potom $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, kde $A_n \in \boldsymbol{\Pi}^0_{\xi_n}(Y)$, $\xi_n < \alpha$, a

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\omega} A_n\Big) = \bigcup_{n\in\omega} \underbrace{f^{-1}(A_n)}_{\in \boldsymbol{\Pi}^0_{\xi_n}(X)},$$

a tedy $f^{-1}(A) \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha(X)$. Vztah

$$f^{-1}(Y \setminus A) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(A) = X \setminus f^{-1}(A),$$

pak ukazuje platnost tvrzení pro $\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha$.

Tvrzení pro $\boldsymbol{\Delta}^0_\alpha$ vyplývá okamžitě z výsledku pro aditivní a multiplikativní třídy. ■

Poznámka 2.1.8. Pro obrazy podobné tvrzení neplatí. O tom více v dalších paragrafech.

Věta 2.1.9 (borelovské třídy v polských prostorech)**.** Nechť X, Y jsou polské prostory, $A \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha(X)$, $\alpha \ge 3$ (resp. $\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha(X), \alpha \ge 2$), $B \subset Y$. Jestliže jsou A a B homeomorfní, potom $B \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha(Y)$ (resp. $\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha(Y)$).

Důkaz. Tvrzení dokážeme pouze pro aditivní třídy. Pro multiplikativní třídy je důkaz stejný. Nechť $f : A \to B$ je homeomorfismus A na B. Tento podle Věty 1.7.2 rozšíříme na homeomorfismus množiny $\tilde{A} \in \boldsymbol{\Pi}^0_2(X)$ na množinu $\tilde{B} \in \boldsymbol{\Pi}^0_2(Y)$. Potom je $B \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha(\tilde{B})$, a tedy také $B \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha(Y)$, neboť $\alpha \geq 3$. ■

Příklad 2.1.10.

- Označme
$$\mathbf{Q} = \{\alpha \in 2^\omega;\ \exists n \in \omega\ \forall j \geq n :\ \alpha_j = 0\}.$$
Množina $\mathbf{Q}$ je $\boldsymbol{\Sigma}^0_2$ a není $\boldsymbol{\Pi}^0_2$.
- Množina
$$\mathbf{S} = \{\beta \in (2^\omega)^\omega;\ \forall n \in \omega :\ \beta_n \in \mathbf{Q}\}$$
je $\boldsymbol{\Pi}^0_3$ a není $\boldsymbol{\Sigma}^0_3$.
- Nechť X je nespočetný polský prostor. Množina
$$\mathrm{Fin} = \{K \in \mathcal{K}(X);\ K \text{ je konečná}\}$$
je typu $\boldsymbol{\Sigma}^0_2$ a není typu $\boldsymbol{\Pi}^0_2$.

2.2. Analytické množiny a jejich vlastnosti

Definice 2.2.1. Nechť X je polský a $A \subset X$. Řekneme, že A je **analytická (v X)**, jestliže existuje polský prostor Y a spojité zobrazení $\varphi : Y \to X$ takové, že $\varphi(Y) = A$. Množinu všech analytických množin v X značíme $\boldsymbol{\Sigma}^1_1(X)$.

Řekneme, že A je **koanalytická (v X)**, jestliže $X \setminus A \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1(X)$. Množinu všech koanalytických množin v X značíme $\boldsymbol{\Pi}^1_1(X)$.

Poznámka 2.2.2.

(i) Prázdná množina je analytická, stačí vzít za Y prázdný prostor.
(ii) Každá $\boldsymbol{\Pi}^0_2$ podmnožina polského prostoru X je analytická (Věta 1.3.3).
(iii) Spojitá zobrazení mezi polskými prostory zachovávají analytičnost, tj. je-li $\psi : X \to Z$ spojité zobrazení mezi polskými prostory a $A \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1(X)$, pak $\psi(A) \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1(Z)$.

Věta 2.2.3. Nechť X je polský a A_n, $n \in \omega$, jsou analytické v X. Potom $\bigcup_{n\in\omega} A_n$, $\bigcap_{n\in\omega} A_n$ jsou analytické v X.

Důkaz. Sjednocení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $A_n \neq \emptyset$ pro každé $n \in \omega$. Podle Věty 1.3.3 existuje pro každé $n \in \omega$ spojité zobrazení $\varphi_n : \omega^\omega \to X$ splňující $\varphi_n(\omega^\omega) = A_n$. Definujeme $\varphi : \omega^\omega \to X$ takto
$$\varphi(\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots) = \varphi_{\nu_0}(\nu_1, \nu_2, \dots),$$
tj. $\varphi(n^\wedge\nu) = \varphi_n(\nu)$.

Zobrazení φ je spojité. Pokud $\nu^j \to \nu$, pak existuje $n_0 \in \omega$ takové, že pro každé $j \geq n_0$ platí $\nu^j_0 = \nu_0$. Pak máme
$$\lim_{j\to\infty} \varphi(\nu^j) = \lim_{j\to\infty} \varphi_{\nu^j_0}(\nu^j_1, \dots) = \lim_{j\to\infty} \varphi_{\nu_0}(\nu^j_1, \dots) = \varphi_{\nu_0}(\nu_1, \dots) = \varphi(\nu).$$

Platnost $\varphi(\omega^\omega) = \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Je-li $x \in \bigcup_{n\in\omega} A_n$, potom existuje $n \in \omega$ takové, že $x \in A_n$. Pak nalezneme $\nu \in \omega^\omega$ takové, že $\varphi_n(\nu) = x$. Odtud máme $\varphi(n^\wedge\nu) = \varphi_n(\nu) = x$. Opačná inkluze je zřejmá.

Nyní dokážeme tvrzení o průniku. Předpokládejme, že $\bigcap_{n\in\omega} A_n \neq \emptyset$, v opačném případě tvrzení zřejmě platí. Položme $Y = (\omega^\omega)^\omega$. Prostor Y je polský podle Věty 1.2.1(i). Nechť nyní φ_n jsou jako v předchozí části. Položme

$$F = \{y = (y_0, y_1, y_2, \dots) \in Y;\ \forall n, m \in \omega :\ \varphi_n(y_n) = \varphi_m(y_m)\}.$$

Platí

$$F = \bigcap_{n,m\in\omega} \underbrace{\{y \in Y;\ \varphi_n(y_n) = \varphi_m(y_m)\}}_{\text{uzavřená}}.$$

Množina F je tedy uzavřená v Y a jde tak o polský prostor. Pak platí

$$\varphi_0 \circ \pi_0(F) = \bigcap_{n\in\omega} A_n,$$

kde $\pi_0 : Y \to \omega^\omega$ je projekce na nultou souřadnici. Je-li totiž $x \in \varphi_0 \circ \pi_0(F)$, tak existuje $(y_0, y_1, \dots) \in Y$ takové, že

$$x = \varphi_0(y_0) = \varphi_1(y_1) = \dots,$$

a tedy $x \in \bigcap_{n\in\omega} A_n$. Pokud $x \in \bigcap_{n\in\omega} A_n$, pak existují $y_0, y_1, \dots \in \omega^\omega$ takové, že $\varphi_i(y_i) = x$. Pak máme $x = (\varphi_0 \circ \pi_0)(y)$, kde $y = (y_0, y_1, \dots)$. ■

Poznámka 2.2.4.

(i) Z předchozí věty a de Morganových pravidel dostáváme analogické tvrzení i pro koanalytické množiny.
(ii) Třída analytických množin není uzavřená na operaci doplňku.

Věta 2.2.5. Nechť X, Y jsou polské prostory, $A \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1(X)$ (resp. $\boldsymbol{\Pi}^1_1(X)$), $B \subset Y$ a A je homeomorfní s B. Potom $B \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1(Y)$ (resp. $\boldsymbol{\Pi}^1_1(Y)$).

Důkaz. Tvrzení pro $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ plyne z Poznámky 2.2.2.

Nechť $A \in \boldsymbol{\Pi}^1_1(X)$ a $\varphi : A \to B$ je homeomorfismus. Podle Lavrentěvovy věty (Věta 1.7.2) existují $\tilde{A} \in \boldsymbol{\Pi}^0_2(X)$, $\tilde{B} \in \boldsymbol{\Pi}^0_2(Y)$ a homeomorfismus $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \to \tilde{B}$ rozšiřující φ, přičemž $A \subset \tilde{A}$, $B \subset \tilde{B}$. Potom $\tilde{B} \setminus B \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1(Y)$, a tedy $Y \setminus B = (Y \setminus \tilde{B}) \cup (\tilde{B} \setminus B) \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1(Y)$, takže $B \in \boldsymbol{\Pi}^1_1(Y)$. ■

Věta 2.2.6. Nechť X je polský. Pak $\mathrm{Borel}(X) \subset \boldsymbol{\Sigma}^1_1(X)$ a $\mathrm{Borel}(X) \subset \boldsymbol{\Pi}^1_1(X)$.

Důkaz. Podle Věty 1.3.3 platí $\boldsymbol{\Sigma}^0_1(X) \subset \boldsymbol{\Sigma}^1_1(X)$. Nyní Poznámka v 2.1.5 a Věta 2.2.3 společně dávají $\mathrm{Borel}(X) \subset \boldsymbol{\Sigma}^1_1(X)$. Odtud také ihned plyne $\mathrm{Borel}(X) \subset \boldsymbol{\Pi}^1_1(X)$. ■

2.3. Luzinova věta

Věta 2.3.1. Nechť X je polský, $A_1, A_2 \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1(X)$ a $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Pak existuje borelovská množina $B \subset X$ oddělující A_1 od A_2, tj. $A_1 \subset B$ a $B \cap A_2 = \emptyset$.

K důkazu použijeme následující lemma.

Lemma 2.3.2. Nechť pro každé $n, m \in \omega$ lze množinu $C_n \subset X$ oddělit od množiny $D_m \subset X$ borelovskou množinou. Pak lze $\bigcup_{n\in\omega} C_n$ oddělit od $\bigcup_{m\in\omega} D_m$ borelovskou množinou.

Důkaz. Nechť $n, m \in \omega$ a $B_{n,m}$ je borelovská množina splňující $C_n \subset B_{n,m}$, $B_{n,m} \cap D_m = \emptyset$. Pak stačí položit

$$B = \bigcup_{n\in\omega} \bigcap_{m\in\omega} B_{n,m}.$$

■

Důkaz věty. Pokud je alespoň jedna z množin A_1, A_2 prázdná, pak tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že uvedené množiny jsou neprázdné. Pak existují spojitá zobrazení φ_1 a φ_2 z ω^ω do X taková, že $\varphi_1(\omega^\omega) = A_1$ a $\varphi_2(\omega^\omega) = A_2$. Předpokládejme, že A_1 nelze oddělit od A_2 borelovskou množinou. Pak podle Lemmatu existují $\nu_0, \mu_0 \in \omega$ taková, že $\varphi_1(\mathcal{N}(\mu_0))$ nelze oddělit od $\varphi_2(\mathcal{N}(\nu_0))$ borelovskou množinou. Platí totiž

$$\varphi_i(\omega^\omega) = \bigcup_{n\in\omega} \varphi_i(\mathcal{N}(n)), \qquad i = 1, 2.$$

Opakovaným užitím Lemmatu 2.3.2 zkonstruujeme $\mu, \nu \in \omega^\omega$ takové, že pro každé $k \in \omega$ platí: $\varphi_1(\mathcal{N}(\nu|k))$ nelze oddělit od $\varphi_2(\mathcal{N}(\mu|k))$ borelovskou množinou. Platí $\varphi_1(\mu) \in A_1$, $\varphi_2(\nu) \in A_2$, a tak existují otevřené disjunktní množiny $G_1, G_2 \subset X$ takové, že $\varphi_1(\mu) \in G_1$ a $\varphi_2(\nu) \in G_2$. Zobrazení φ_1, φ_2 jsou spojitá, a proto existuje $k \in \omega$ takové, že

$$\varphi_1(\mathcal{N}(\mu|k)) \subset G_1 \quad \text{a} \quad \varphi_2(\mathcal{N}(\mu|k)) \subset G_2,$$

což je spor. ■

Důsledek 2.3.3. Nechť X je polský, $A \subset X$ je analytická i koanalytická. Potom A je borelovská.

Důkaz. Stačí aplikovat Luzinovu větu na dvojici $A_1 := A$ a $A_2 := X \setminus A$. ■

Příklad 2.3.4. 1. Množina

$$\{f \in \mathcal{C}([0,1]);\ f \text{ má vlastní derivaci v každém bodě}\}$$

je koanalytická, ne však borelovská.

2. Množina

$$\{f \in \mathcal{C}([0,2\pi]);\ \text{Fourierova řada } f \text{ konverguje všude k } f\}$$

je koanalytická, ne však borelovská (Kechris-Ajtai [**1**]).

3. Množina

$$\{K \in \mathcal{K}([0,1]);\ K \text{ je spočetná}\}$$

je koanalytická, ne však borelovská (Hurewicz).

——— Konec 9. přednášky, 7.11. 2011 ———

2.4. Suslinova operace

Definice 2.4.1. **Suslinovým schématem** (na množině X) rozumíme systém podmnožin X indexovaný prvky $\omega^{<\omega}$. **Suslinova operace** aplikovaná na schéma $(P_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ dává množinu

$$\mathcal{A}_s P_s = \bigcup_{\nu\in\omega^\omega} \bigcap_{n\in\omega} P_{\nu|n}.$$

Věta 2.4.2. Nechť X je polský, $A \subset X$. Pak je ekvivalentní:

(a) $A \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1(X)$,
(b) existuje uzavřená $F \subset X \times \omega^\omega$ taková, že $\pi_X(F) = A$,
(c) existuje Suslinovo schéma $(F_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ z uzavřených podmnožin X takové, že $A = \mathcal{A}_s F_s$.

Důkaz. Předpokládejme, že A je neprázdná, jinak je tvrzení zřejmé.

(a) $\Rightarrow$ (c) Nechť $\varphi\colon \omega^\omega \to X$ je spojité a na A. Položme $F_s = \overline{\varphi(\mathcal{N}(s))}$. Pokud $x \in A$, pak existuje $\mu \in \omega^\omega$ takové, že $x = \varphi(\mu)$. Pak máme

$$x \in \varphi(\mathcal{N}(\mu|k)) \subset F_{\mu|k}$$

pro každé $k \in \omega$. Odtud $x \in \bigcap_{k\in\omega} F_{\mu|k} \subset \bigcup_{\nu\in\omega^\omega} \bigcap_{n\in\omega} F_{\nu|n}$. Pokud existuje $\mu \in \omega^\omega$ takové, že $x \in \overline{\varphi(\mathcal{N}(\mu|k)}$, pak $x = \varphi(\mu)$ díky spojitosti φ.

(c) $\Rightarrow$ (b) Položme

$$F_n = \bigcup_{\substack{s\in\omega^{<\omega}\\ |s|=n}} (F_s \times \mathcal{N}(s)), \qquad F = \bigcap_{n\in\omega} F_n.$$

Pak F_n jsou uzavřené, a tedy i F je uzavřená. Navíc $\pi(F) = A$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Zřejmé. ■

2.5. Obrazy a vzory při borelovských zobrazeních

Věta 2.5.1. Nechť X je polský. Potom existuje uzavřená množina $F \subset \omega^\omega$ a spojitá bijekce $f\colon F \to X$.

Důkaz. Zafixujme úplnou kompatibilní metriku na X splňující $\operatorname{diam} X \le 1$. Budeme konstruovat Suslinovo schéma $(F_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ takové, že pro každé $s \in \omega^{<\omega}$ platí

(i) $F_\emptyset = X$,
(ii) F_s je typu F_σ,
(iii) $F_s = \bigcup_{j\in\omega} F_{s^\wedge j} = \bigcup_{j\in\omega} \overline{F_{s^\wedge j}}$,
(iv) $\operatorname{diam} F_s \le 2^{-|s|}$,
(v) $\forall i, j \in \omega:\ F_{s^\wedge i} \cap F_{s^\wedge j} = \emptyset$.

Konstrukce schématu. Pro libovolnou množinu D typu F_σ a libovolné $\varepsilon > 0$ stačí nalézt spočetný disjunktní systém $\mathcal{D}$ obsahující F_σ množiny o diametru menším než ε a splňující

- $D = \bigcup \mathcal{D}$,
- $\forall E \in \mathcal{D}:\ \overline{E} \subset D$.

Napišme nejprve D jako sjednocení rostoucí posloupnosti uzavřených množin C_j, $j \in \omega$, přičemž $C_0 = \emptyset$. Potom každý rozdíl $C_{j+1} \setminus C_j$ vyjádříme jako spočetné sjednocení disjunktního systému F_σ množin $(E_i^j)_{i\in\omega}$, kde $\operatorname{diam} E_i^j < \varepsilon$. Položme $\mathcal{D} = \{E_i^j;\ i, j \in \omega\}$. Požadované podmínky jsou splněny včetně poslední, platí totiž $\overline{E_i^j} \subset C_j \subset D$.

Konstrukce F a f. Položme

$$F = \{\nu \in \omega^\omega;\ \bigcap_{n\in\omega} F_{\nu|n} \neq \emptyset\}, \qquad \{f(\nu)\} = \bigcap_{n\in\omega} F_{\nu|n}.$$

Není těžké ověřit, že zobrazení $f\colon F \to X$ je dobře definováno, je spojité a je na. Ukážeme, že množina F je uzavřená. Vezměme posloupnost (ν^j) prvků množiny F s limitou ν. Pro každé $j \in \omega$ nalezneme $x_j \in \bigcap_{n\in\omega} F_{\nu^j|n}$. Posloupnost (x^j) je cauchyovská, a tedy konvergentní. Označme x^* limitu této posloupnosti. Potom $x^* \in \bigcap_{n\in\omega} \overline{F_{\nu|n}} = \bigcap_{n\in\omega} F_{\nu|n}$, a tedy $\nu \in F$. ■

Lemma 2.5.2. Nechť (X, τ) je polský a $F \subset X$ je uzavřená. Nechť τ_F je topologie generovaná $\tau \cup \{F\}$. Potom

- τ_F je polská,
- $F \in \boldsymbol{\Delta}^0_1(\tau_F)$,
- $\mathrm{Borel}(\tau_F) = \mathrm{Borel}(\tau)$.

Důkaz. Prostor (X, τ_F) je homeomorfní s $\big((X \setminus F) \times \{0\}\big) \cup \big(F \times \{1\}\big) \subset X \times 2$, což je G_δ podmnožina $X \times 2$. Prostor (X, τ_F) je tedy polský. Zbývající dvě vlastnosti je snadné ověřit. ■

Lemma 2.5.3. Nechť (X, τ) je polský a $(\tau_n)_{n\in\omega}$ jsou polské topologie and $\tau \subset \tau_n$. Potom topologie τ_∞ generovaná $\bigcup_{n\in\omega} \tau_n$ je polská. Jestliže $\tau_n \subset \mathrm{Borel}(\tau)$, potom $\mathrm{Borel}(\tau) = \mathrm{Borel}(\tau_\infty)$.

Důkaz. Položme $X_n = X$, $\varphi\colon X \to \prod X_n$, $\varphi(x) = (x, x, x, \dots)$. Zobrazení φ je homeomorfismus (X, τ_∞) na $\varphi(X)$. ■

Věta 2.5.4. Nechť (X, τ) je polský a $A \subset X$ je borelovská. Potom existuje polská topologie $\tau \subset \tau_A$ taková, že $\mathrm{Borel}(\tau) = \mathrm{Borel}(\tau_A)$ a $A \in \boldsymbol{\Delta}^0_1(\tau_A)$.

Důkaz. Položme
$$\mathcal{S} = \{D \in \mathrm{Borel}(X);\ \text{existuje polská topologie } \tau_D \supset \tau \text{ splňující}$$
$$\mathrm{Borel}(\tau_D) = \mathrm{Borel}(\tau), A \in \boldsymbol{\Delta}^0_1(\tau_D)\}.$$
Podle Lemmatu 2.5.2 platí $\tau \subset \mathcal{S}$. Systém $\mathcal{S}$ tvoří σ-algebru, neboť je zřejmě uzavřený na komplementy a podle Lemmat 2.5.2 a 2.5.3 je uzavřený na spočetná sjednocení. Potom tedy $\mathcal{S} = \mathrm{Borel}(X)$, čímž je věta dokázána. ■

Lemma 2.5.5. Nechť X, Y jsou polské a $f\colon X \to Y$ je borelovské. Potom graf f je borelovskou podmnožinou $X \times Y$.

Důkaz. Nechť $\mathcal{U}_n, n \in \omega$, je spočetný systém otevřených koulí o diametru menším než 2^{-n}, který pokrývá Y. Potom
$$\mathrm{graf}\, f = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{U\in\mathcal{U}_n} f^{-1}(U) \times U,$$
a tedy graf f je borelovská množina. ■

Věta 2.5.6. Nechť X, Y jsou polské a $f\colon X \to Y$ je borelovské. Jestliže $A \subset X$ je borelovská a $f|_A$ je prosté, potom $f(A)$ je borelovská.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že f je spojitá a A uzavřená. Podle Věty 2.5.1 lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že A je uzavřená podmnožina ω^ω. Označme $B_s = f(\mathcal{N}(s) \cap A)$. Platí

- $\forall s \in \omega^{<\omega}\ \forall i, j \in \omega, i \neq j\ :\ B_{s^\wedge i} \cap B_{s^\wedge j} = \emptyset$,
- $B_s = \bigcup_{i\in\omega} B_{s^\wedge i}$.

Pomocí Luzinovy oddělovací věty (Věta 2.3.1) nalezneme Suslinovo schéma $(B'_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ sestávající z borelovských množin, které splňuje

- $\forall s \in \omega^{<\omega}\ \forall i, j \in \omega, i \neq j\ :\ B'_{s^\wedge i} \cap B'_{s^\wedge j} = \emptyset$,
- $\forall s \in \omega^{<\omega}\ :\ B_s \subset B'_s$.

Dále definujeme $B^*_\emptyset = Y$ a $B^*_{s^\wedge j} = B'_{s^\wedge j} \cap \overline{B_{s^\wedge j}} \cap B^*_s$. Potom je pro každé $s \in \omega^{<\omega}$ množina B^*_s borelovská a platí $B_s \subset B^*_s \subset \overline{B_s}$. Dokážeme $f(A) = \bigcap_{k\in\omega} \bigcup_{s\in\omega^k} B^*_s$.

Pokud $x \in f(A)$, potom existuje $\nu \in A$ takové, že $f(\nu) = x$. Potom $x \in B_{\nu|k} \subset B^*_{\nu|k}$ pro každé $k \in \omega$. Odtud plyne $x \in \bigcap_{k\in\omega} \bigcup_{s\in\omega^k} B^*_s$.

Pokud $x \in \bigcap_{k\in\omega} \bigcup_{s\in\omega^k} B_s^*$. Potom existuje $\nu \in \omega^\omega$ takové, že $x \in B_{\nu|k}^*$. Potom pro každé $k \in \omega$ platí $f(\mathcal{N}(\nu|k) \cap A) \neq \emptyset$. Odtud plyne $\nu \in A$. Odvodíme $f(\nu) = x$. Kdyby $f(\nu) \neq x$, pak existuje okolí U bodu $f(\nu)$ takové, že $x \notin \overline{U}$. Potom pro jisté $k_0 \in \omega$ máme $\overline{f(\mathcal{N}(\nu|k_0) \cap A)} = \overline{B_{\nu|k_0}} \subset \overline{U}$ a přitom $x \in B_{\nu|k_0}^* \subset \overline{B_{\nu|k_0}}$, což je spor.

Nyní předpokládejme, že f je spojité zobrazení a A je borelovská. Na prostoru X existuje polská topologie τ_A taková, že $A \in \boldsymbol{\Delta}_1^0(\tau_A)$ a $\tau \subset \tau_A$. Zobrazení f je potom spojité z (X, τ_A) do Y, a proto podle předchozího je $f(A)$ borelovská.

Pokud je f borelovské, potom $f(A) = \pi_Y(\operatorname{graf} f \cap (A \times Y))$, a tedy $f(A)$ je prostým spojitým obrazem borelovské množiny $\operatorname{graf} f \cap (A \times Y)$. ■

Věta 2.5.7. Nechť X, Y jsou polské a $f\colon X \to Y$ je borelovské.

(i) Jestliže $A \in \boldsymbol{\Sigma}_1^1(X)$, potom $f(A) \in \boldsymbol{\Sigma}_1^1(Y)$.
(ii) Jestliže $B \in \boldsymbol{\Sigma}_1^1(Y)$, potom $f^{-1}(B) \in \boldsymbol{\Sigma}_1^1(X)$.
(iii) Jestliže $B \in \boldsymbol{\Pi}_1^1(Y)$, potom $f^{-1}(B) \in \boldsymbol{\Pi}_1^1(X)$.

Důkaz. (i) Množina $\operatorname{graf} f$ je borelovská podle Lemmatu 2.5.5. Platí

$$f(A) = \pi_Y\big(\operatorname{graf} f \cap (A \times Y)\big),$$

a tedy $f(A)$ je spojitým obrazem analytické množiny, takže $f(A)$ je analytická.

(ii) a (iii) Tvrzení plynou z rovností

$$f^{-1}(A) = \pi_X\big(\operatorname{graf} f \cap (X \times A)\big),$$
$$f^{-1}(A) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(Y \setminus A).$$

■

2.6. Standardní borelovské prostory

Definice 2.6.1. Měřitelný prostor $(X, \mathcal{S})$ se nazývá **standardní borelovský prostor**, jestliže existuje polská topologie τ na X taková, že $\operatorname{Borel}(X, \tau) = \mathcal{S}$.

Definice 2.6.2. Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{F}(X)$ je systém všech uzavřených podmnožin X. Nechť $\mathcal{S}$ je σ-algebra generovaná množinami tvaru $\{F \in \mathcal{F}(X);\ F \cap U \neq \emptyset\}$, kde $U \subset X$ je otevřená. Potom **Effrosovým borelovským prostorem** rozumíme $(\mathcal{F}(X), \mathcal{S})$.

Věta 2.6.3. Pokud je X polský, potom $\mathcal{F}(X)$ je standardní borelovský prostor.

Příklad 2.6.4 (separabilní Banachovy prostory)**.** Prostor

$$\mathrm{SB} = \{Y \in \mathcal{F}(\mathcal{C}([0,1]));\ Y \text{ je Banachův podprostor } \mathcal{C}([0,1])\}$$

opatřený restrikcí Effrosovy σ-algebry je standardní borelovský. Platí

$$\mathrm{SD} = \{Y \in \mathrm{SB};\ Y \text{ má separabilní duál}\},$$
$$\mathrm{NU} = \{Y \in \mathrm{SB};\ Y \text{ není univerzální}\},$$
$$\mathrm{REFL} = \{Y \in \mathrm{SB};\ Y \text{ je reflexivní}\},$$
$$\mathrm{NL}_1 = \{Y \in \mathrm{SB};\ Y \text{ neobsahuje } \ell_1\},$$

jsou $\boldsymbol{\Pi}_1^1$ neborelovské v $\mathcal{C}([0,1])$.

Příklad 2.6.5 (von Neumannovy algebry)**.** Nechť H je komplexní nekonečnědimenzionální separabilní Hilbertův prostor. Označme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(H) &= \{T \in \mathcal{L}(H);\ ||T|| \leq 1\},\\ \mathrm{VN} &= \{\mathcal{A} \cap \mathcal{L}_1(H);\ \mathcal{A} \text{ je von Neumannova algebra}\}.\end{aligned}$$

Na $\mathcal{L}_1(H)$ uvažujeme slabou topologii. Potom VN je standardní borelovský prostor.

KAPITOLA 3

Regularita analytických množin

3.1. Množiny s Baireovou vlastností

Definice 3.1.1. Nechť X je topologický prostor. Množina $A \subset X$ má **Baireovu vlastnost (v X)**, jestliže existuje otevřená množina $U \subset X$ a množina první kategorie $M \subset X$ takové, že $A = U \triangle M$. Systém všech podmnožin X s Baireovou vlastností značíme $\mathrm{Baire}(X)$.

Věta 3.1.2. Nechť X je topologický prostor. Potom $\mathrm{Baire}(X)$ tvoří σ-algebru obsahující všechny borelovské podmnožiny X.

Důkaz. Je-li $F \subset X$ uzavřená, pak $F \in \mathrm{Baire}(X)$, neboť lze psát $F = \operatorname{Int} F \cup (F \setminus \operatorname{Int} F)$, kde první člen je množina otevřená a druhý řídká.

Uzavřenost na doplňky. Nechť nyní $A = G \triangle M$, kde G je otevřená a M je první kategorie. Potom platí

$$X \setminus A = (X \setminus G) \triangle M' = (G' \triangle M'') \triangle M' = G' \triangle M''',$$

kde G' je otevřená a M', M'', M''' jsou první kategorie.

Uzavřenost na spočetná sjednocení. Nechť $A_n \in \mathrm{Baire}(X)$, $n \in \omega$. Pišme $A_n = G_n \triangle M_n$, kde G_n je otevřená množina a M_n je první kategorie. Potom platí

$$\bigcup_{n\in\omega} A_n = \bigcup_{n\in\omega} (G_n \setminus M_n') \cup M_n'' = \Big(\bigcup_{n\in\omega} G_n \setminus M''' \Big) \cup \bigcup_{n\in\omega} M_n'',$$

kde M_n', M_n'', M''' jsou první kategorie.

Inkluze $\mathrm{Borel}(X) \subset \mathrm{Baire}(X)$ plyne z předchozího. ■

Lemma 3.1.3. Nechť X je topologický prostor a $A \subset X$. Jestliže pro každé $x \in A$ existuje otevřená množina V taková, že $x \in V$ a $A \cap V$ je první kategorie, potom A je první kategorie.

Důkaz. Nechť $\mathcal{U}$ je maximální disjunktní systém otevřených množin takový, že $U \cap A$ je první kategorie pro každou $U \in \mathcal{U}$. Potom $A \cap \bigcup \mathcal{U}$ je první kategorie, stejně tak $A \setminus \bigcup \mathcal{U}$, neboť $X \setminus \bigcup \mathcal{U}$ je řídká. ■

Definice 3.1.4. Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a $A \subset X$. Řekneme, že $\hat{A} \in \mathcal{S}$ je **$\mathcal{S}$-obalem** množiny A, jestliže splňuje

(i) $A \subset \hat{A}$,
(ii) jestliže $B \in \mathcal{S}$ splňuje $A \subset B$, potom každá podmnožina $\hat{A} \setminus B$ je prvkem $\mathcal{S}$.

Věta 3.1.5. Nechť X je topologický prostor. Pak každá množina v X má $\mathrm{Baire}(X)$-obal.

Důkaz. Položme

$$E(A) = X \setminus \bigcup \{V \subset X;\ V \text{ je otevřená a } A \text{ je první kategorie ve } V\}.$$

Množina $A \setminus E(A)$ je první kategorie podle Lemmatu 3.1.3. Existuje tedy $W \subset X$ první kategorie a F_σ taková, že $A \setminus E(A) \subset W$. Položme $\hat{A} = E(A) \cup W$. Potom $\hat{A} \in \mathrm{Baire}(X)$.

Nechť $B \in \mathrm{Baire}(X)$ splňující $A \subset B$. Zřejmě $E(A) \subset E(B)$. Takže

$$\hat{A} \setminus B = (E(A) \cup W) \setminus B = (E(A) \setminus B) \cup (W \setminus B) \subset (E(B) \setminus B) \cup (W \setminus B).$$

Množina $W \setminus B$ je první kategorie. Množina B má Baireovu vlastnost, a proto lze psát $B = H \triangle M$, kde H je otevřená množina a M je množina první kategorie. Potom máme

$$E(B) \setminus B \subset (E(B) \setminus H) \cup M \subset (\overline{H} \setminus H) \cup M.$$

Poslední množina je první kategorie, takže $\hat{A} \setminus B$ je také první kategorie, což jsme měli dokázat. ■

Věta 3.1.6 (Szpilrajn-Marczewski)**.** Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, kde každá $A \subset X$ má $\mathcal{S}$-obal. Potom $\mathcal{S}$ je uzavřená na Suslinovu operaci.

Důkaz. Nechť $(P_s)_{s \in \omega^{<\omega}}$ je systém množin z $\mathcal{S}$. Položme $P = \mathcal{A}_s P_s$. Můžeme předpokládat, že $P_s \supset P_t$ pro každé $s \prec t$. Jinak by stačilo místo P_t vzít $\bigcap_{s \prec t} P_s$. Označme

$$A^s = \bigcup_{\nu \in \mathcal{N}(s)} \bigcap_{n \in \omega} P_{\nu|n},$$

neboli $A^s = \mathcal{A}_t P_{s^\wedge t}$. Platí: $A^s \subset P_s$, $A^\emptyset = P$, $A^s = \bigcup_{n \in \omega} A^{s^\wedge n}$. Nechť $\widehat{A^s}$ je $\mathcal{S}$-obal A^s splňující $A^s \subset \widehat{A^s} \subset P_s$. Položme

$$Q_s = \widehat{A^s} \setminus \bigcup_{n \in \omega} \widehat{A^{s^\wedge n}}, \qquad Q = \bigcup_{s \in \omega^{<\omega}} Q_s.$$

Každá podmnožina Q je v $\mathcal{S}$ podle definice $\mathcal{S}$-obalu. Platí $\widehat{A^\emptyset} \setminus P \subset Q$. Skutečně, máme-li $x \in \widehat{A^\emptyset} \setminus Q$, pak existuje $n_0 \in \omega$ takové, že $x \in \widehat{A^{n_0}} \setminus Q$. Potom nalezneme $n_1 \in \omega$ takové, že $x \in \widehat{A^{n_0, n_1}} \setminus Q$. Opakováním tohoto postupu dostaneme $\nu \in \omega^\omega$ takové, že $x \in \widehat{A^{\nu|n}} \subset P_{\nu|n}$ pro každé $n \in \omega$. Odtud pak $x \in P$.

Nyní lze psát

$$P = \widehat{A^\emptyset} \setminus (\widehat{A^\emptyset} \setminus P).$$

Oba členy rozdílu patří do $\mathcal{S}$, a tedy $P \in \mathcal{S}$. ■

Poznámka 3.1.7. Edward Szpilrajn-Marczewski (1907–1976).

Důsledek 3.1.8. Nechť X je polský. Potom $\boldsymbol{\Sigma}^1_1(X) \subset \mathrm{Baire}(X)$.

Důkaz. Platí $\boldsymbol{\Pi}^0_1(X) \subset \mathrm{Baire}(X)$, a tedy $\boldsymbol{\Sigma}^1_1(X) = \mathcal{A}\boldsymbol{\Pi}^0_1(X) \subset \mathcal{A}\,\mathrm{Baire}(X) = \mathrm{Baire}(X)$. ■

Definice 3.1.9. Nechť X je polský. Řekneme, že $A \subset X$ je **univerzálně měřitelná**, jestliže pro každou σ-konečnou borelovskou míru μ na X je množina A μ-měřitelná.

Poznámka 3.1.10. Připomenutí a ujasnění definic pro účely tohoto textu.

(i) **Borelovskou mírou** na topologickém prostoru X rozumíme míru na měřitelném prostoru $(X, \mathrm{Borel}(X))$.

(ii) Nechť μ je míra na $(X, \mathcal{S})$. Množina $A \subset X$ je **μ-nulová**, jestliže existuje $B \in \mathcal{S}$ taková, že $A \subset B$ a $\mu(B) = 0$. Řekneme, že množina $A \subset X$ je **μ-měřitelná**, jestliže $A = B \cup N$, kde $B \in \mathcal{S}$ a N je μ-nulová.

Věta 3.1.11 (Luzin-Sierpiński). Nechť X je polský a $A \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1(X)$. Potom A je univerzálně měřitelná.

Důkaz. Nechť μ je σ-konečná borelovská míra na X a $\mathcal{S}$ je σ-algebra μ-měřitelných množin. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že μ je pravděpodobnostní. Pro $A \subset X$ položme

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B);\ B \in \mathrm{Borel}(X), A \subset B\}.$$

Pak existuje $\widehat{A} \in \mathrm{Borel}(X)$ taková, že $\mu^*(A) = \mu(\widehat{A})$. Jestliže $A \subset B$ a B je měřitelná, pak $\mu(\widehat{A} \setminus B) = 0$. Jinak by totiž existovala $C \subset \widehat{A} \setminus B \subset \widehat{A} \setminus A$ taková, že $C \in \mathrm{Borel}(X)$ a $\mu(C) > 0$, což nelze. Odtud a z Věty 3.1.6 plyne dokazované tvrzení. ■

Konec 9. přednášky, 9.12. 2013

3.2. Soleckého věta

Nechť X je polský a $\mathcal{I}$ je systém uzavřených podmnožin X. Položme

$$\mathcal{I}^{\mathrm{ext}} = \{A \subset X;\ \exists \mathcal{F} \subset \mathcal{I} :\ \mathcal{F} \text{ je spočetný a } A \subset \bigcup \mathcal{F}\}.$$

Věta 3.2.1 (Solecki [**5**]). Nechť X je polský, $A \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1(X)$ a $\mathcal{I}$ je systém uzavřených množin v X. Pokud $A \notin \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}$, pak existuje $\boldsymbol{\Pi}^0_2$ množina $H \subset A$ taková, že $H \notin \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}$.

Označení 3.2.2. $\mathcal{I}$ bude nyní pevně zvolený systém uzavřených množin daného polského prostoru X. Dále označme

$$\mathcal{I}^{\mathrm{perf}} = \{A \subset X;\ A \neq \emptyset \text{ a pro každou } U \in \boldsymbol{\Sigma}^0_1(X), U \cap A \neq \emptyset \text{ máme } U \cap A \notin \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}\},$$

$$\ker A = A \setminus \bigcup\{U \subset X;\ U \text{ je otevřená a } U \cap A \in \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}\},$$

$$\mathrm{MGR}(Y) = \{Z \subset Y;\ Z \text{ je první kategorie v } Y\}, \qquad Y \subset X.$$

Lemma 3.2.3. Nechť $A \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1(X) \setminus \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}$. Pak existuje Suslinovo schéma $(A_s)_{s \in \omega^\omega}$ sestávající z uzavřených množin takové, že

(i) $A_\emptyset \neq \emptyset$,
(ii) $\mathcal{A}_s A_s \subset A$,
(iii) jestliže $A_s \neq \emptyset$, pak $A \cap A_s \in \mathcal{I}^{\mathrm{perf}}$ a $A \cap A_s$ je hustá v A_s,
(iv) $\bigcup_{n \in \omega} A_{s^\wedge n}$ je hustou podmnožinou A_s.

Důkaz. Nechť $(H_s)_{s \in \omega^{<\omega}}$ sestává z uzavřených podmnožin X a $A = \mathcal{A}_s H_s$. Pro $s \in \omega^{<\omega}$ položme

$$L_s = \mathcal{A}_t H_{s^\wedge t}, \qquad A_s = \overline{\ker(L_s)}.$$

Ověření vlastností (i)-(iv).

(i) Platí $A_\emptyset = \overline{\ker(L_\emptyset)} = \overline{\ker(A)} \neq \emptyset$.

(ii) Platí $L_s \subset H_s$, H_s je uzavřená, a tedy $A_s \subset H_s$. Odtud pak okamžitě

$$\mathcal{A}_s A_s \subset \mathcal{A}_s H_s = A.$$

(iii) Platí $\ker(L_s) \subset A \cap A_s$ a $\ker(L_s)$ je hustá v A_s. Odtud také $A \cap A_s \neq \emptyset$, pokud $A_s \neq \emptyset$. Zvolme $U \subset X$ otevřenou takovou, že $U \cap A \cap A_s \neq \emptyset$. Pak $U \cap \ker(L_s) \neq \emptyset$, a tedy $U \cap \ker(L_s) \notin \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}$. Odtud potom $U \cap A \cap A_s \notin \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}$.

(iv) Inkluze $\bigcup_{n\in\omega} A_{s^\frown n} \subset A_s$ plyne přímo z definice A_s. Uvažujme nyní opět otevřenou množinu $U \subset X$ protínající A_s. Pak $U \cap \ker(L_s) \neq \emptyset$ a navíc $U \cap L_s \notin \mathcal{I}^{\text{ext}}$. Platí také $L_s = \bigcup_{n\in\omega} L_{s^\frown n}$, takže existuje $n_0 \in \omega$ takové, že $U \cap L_{s^\frown n_0} \notin \mathcal{I}^{\text{ext}}$. Odtud plyne $U \cap A_{s^\frown n_0} \neq \emptyset$. ■

Konec 10. přednášky, 12.12. 2013

Důkaz věty. Mějme $A \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1(X)\setminus\mathcal{I}^{\text{ext}}$ a A_s, $s \in \omega^{<\omega}$, nechť jsou jako v Lemmatu 3.2.3. Rozlišíme dva případy.

1. případ: $\exists s \in \omega^{<\omega}\ \exists$ otevřená $U \subset X:\ A_s \cap U \neq \emptyset\ \&\ \mathrm{MGR}(A_s \cap U) \subset \mathcal{I}^{\text{ext}}$.

Položme $\tilde{A} := A \cap A_s \cap U$. Podle (iii) z Lemmatu máme $\tilde{A} \in \mathcal{I}^{\text{perf}} \cap \boldsymbol{\Sigma}^1_1(X)$. Pak má $\tilde{A}$ Baireovu vlastnost v prostoru $A_s \cap U$, tj. $\tilde{A} = H \cup M$, kde $H \in \boldsymbol{\Pi}^0_2(A_s \cap U)$ a M je první kategorie v $A_s \cap U$. Odtud snadno plyne $M \in \mathcal{I}^{\text{ext}}$ a $H \in \boldsymbol{\Pi}^0_2(X) \setminus \mathcal{I}^{\text{ext}}$.

2. případ: $\forall s \in \omega^{<\omega}\ \forall$ otevřenou $U \subset X,\ U \cap A_s \neq \emptyset:\ \mathrm{MGR}(A_s \cap U) \setminus \mathcal{I}^{\text{ext}} \neq \emptyset$.

Označení: Je-li $\mathcal{F} \subset 2^X$, pak $\mathcal{F}^d := \overline{\bigcup \mathcal{F}} \setminus \bigcup\{\overline{F};\ F \in \mathcal{F}\}$.

Na prostoru X zvolme pevně úplnou kompatibilní metriku. Induktivně budeme definovat $\varphi : \omega^{<\omega} \to \omega^{<\omega}$ a $U_s \subset X$, $s \in \omega^{<\omega}$, takové, že platí

(1) $|\varphi(s)| = |s|$; $\varphi(s) \prec \varphi(t)$, kdykoliv $s \prec t$,
(2) U_s je otevřená,
(3) $\operatorname{diam} U_s \leq 2^{-|s|}$,
(4) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} U_{s^\frown n} = 0$,
(5) $\forall t \in \omega^{<\omega}, t \prec s,\ t \neq s:\ \overline{U_s} \subset U_t$,
(6) $U_{s^\frown m} \cap U_{s^\frown n} = \emptyset$ pro $n, m \in \omega$, $n \neq m$,
(7) $U_s \cap A_{\varphi(s)} \neq \emptyset$,
(8) $\{U_{s^\frown n};\ n \in \omega\}^d \notin \mathcal{I}^{\text{ext}}$,
(9) $\{U_{s^\frown n};\ n \in \omega\}^d \subset U_s$.

Konstrukce φ a U_s.

Položme $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ a za $U_\emptyset$ vezměme libovolnou otevřenou množinu protínající $A_\emptyset$. Předpokládejme, že U_s a $\varphi(s)$ jsou definovány pro všechna $s \in \omega^{<\omega}$ splňující $|s| \leq N$. Vezměme $s \in \omega^{<\omega}$ délky N. Pak máme $U_s \cap A_{\varphi(s)} \neq \emptyset$ (podle (7)) a $\mathrm{MGR}(A_{\varphi(s)} \cap U_s) \setminus \mathcal{I}^{\text{ext}} \neq \emptyset$. Existuje tedy uzavřená množina $K \subset A_{\varphi(s)} \cap U_s$, která je řídká v $A_{\varphi(s)} \cap U_s$, a $K \notin \mathcal{I}^{\text{ext}}$.

Nalezneme množinu $D \subset A_{\varphi(s)} \cap U_s$ splňující:

- D je diskrétní v $X \setminus K$,
- $D \cap K = \emptyset$,
- $\overline{D} = K \cup D$.

Stačí zvolit posloupnost $(y_n)_{n\in\omega}$, jejíž prvky tvoří hustou množinu v K a v níž se každý prvek vyskytuje nekonečně krát, a pro každé $n \in \omega$ nalézt $x_n \in (A_{\varphi(s)} \cap U) \setminus K$ takové, že $\rho(x_n, y_n) < 1/n$. Nechť $D = \{x_n;\ n \in \omega\}$, kde $x_n \neq x_m$ pro $n, m \in \omega$, $n \neq m$. Nechť $U_{s^\frown n}$, $n \in \omega$, jsou otevřené koule takové, že

- $U_{s^\frown n}$ má střed v x_n,
- $\overline{U_{s^\frown n}} \subset U_s$,
- $U_{s^\frown n} \cap U_{s^\frown m} = \emptyset$ pro $n, m \in \omega$, $n \neq m$,
- $\operatorname{diam} U_{s^\frown n} \leq 2^{-|s|-1}$,

- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} U_{s^\frown n} = 0$,
- $\{U_{s^\frown n};\ n \in \omega\}^d = K$.

Poněvadž $x_n \in A_{\varphi(s)}$ máme $U_{s^\frown n} \cap A_{\varphi(s)} \neq \emptyset$. Pro každé $n \in \omega$ nalezneme $k \in \omega$ takové, že $U_{s^\frown n} \cap A_{\varphi(s)^\frown k} \neq \emptyset$ (podle (iv) v Lemmatu 3.2.3). Položíme $\varphi(s^\frown n) = \varphi(s)^\frown k$. Tím je konstrukce φ a U_s provedena.

Položme
$$H = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup \{U_s;\ s \in \omega^{<\omega}, |s| = n\}.$$
Množina H je $\boldsymbol{\Pi}^0_2$ podle (2). Zbývá ukázat, že $H \subset A$ a $H \notin \mathcal{I}^{\text{ext}}$.

- *Inkluze* $H \subset A$. Vlastnosti (5) a (6) implikují rovnost
$$H = \bigcup_{\nu\in\omega^{<\omega}} \bigcap_{n\in\omega} U_{\nu|n}.$$
Protože $\operatorname{diam} U_{\nu|n} \leq 2^{-n}$ a $U_{\nu|n} \cap A_{\varphi(\nu|n)} \neq \emptyset$, tak máme
$$\bigcap_{n\in\omega} U_{\nu|n} \subset \bigcap_{n\in\omega} A_{\varphi(\nu|n)} \subset A.$$

- *Množina* H *není prvkem* $\mathcal{I}^{\text{ext}}$. Pro každé $\nu \in \omega^\omega$ platí $\bigcap_{n\in\omega} U_{\nu|n} \neq \emptyset$ díky úplnosti X, (3) a (5). Odtud vidíme, že $U_s \cap H \neq \emptyset$ pro každé $s \in \omega^{<\omega}$. Předpokládejme, že $H \subset \bigcup_{m\in\omega} F_m$, $F_m \in \mathcal{I}$. Pak podle Baireovy věty existuje $m_0 \in \omega$ a $s \in \omega^{<\omega}$ takové, že $H \cap U_s \subset F_{m_0}$. Pak ovšem díky (4)
$$\{U_{s^\frown n};\ n \in \omega\}^d \subset F_{m_0},$$
což je spor podle (8). ■

Konec 11. přednášky, 2.1. 2014

Věta 3.2.4 (Perfect Set Theorem)**.** Nechť X je polský a $A \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1(X)$ je nespočetná. Pak existuje homeomorfní kopie C prostoru 2^ω obsažená v A.

Důkaz. Položme $\mathcal{I} = \{\{x\};\ x \in X\}$. Pak máme $A \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1(X) \setminus \mathcal{I}^{\text{ext}}$ a podle Věty 3.2.1 existuje $H \subset A$ taková, že $H \in \boldsymbol{\Pi}^0_2(X) \setminus \mathcal{I}^{\text{ext}}$. Položme $G = \ker(H)$. Víme $G \in \boldsymbol{\Pi}^0_2(X) \cap \mathcal{I}^{\text{perf}}$. Nyní stačí provést v G klasickou cantorovskou konstrukci.

Konstrukce C. Nechť τ je ekvivalentní úplná metrika na G. Nalezneme otevřené koule B_s, $s \in 2^{<\omega}$, v (G, τ) takové, že

- $\overline{B_{s^\frown 0}} \cup \overline{B_{s^\frown 1}} \subset B_s$, $\overline{B_{s^\frown 0}} \cap \overline{B_{s^\frown 1}} = \emptyset$,
- $\operatorname{diam}_\tau B_s \leq 2^{-|s|}$.

Konstrukce využívá nespočetnosti každé otevřené koule v G. Potom $C = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{s\in\omega^n} B_s$ je homeomorfní 2^ω. ■

Poznámka 3.2.5. Tvrzení Věty 3.2.4 nelze pro koanalytické množiny v ZFC dokázat ani vyvrátit.

KAPITOLA 4

Nekonečné hry a jejich použití

4.1. Základní definice

Nechť A je neprázdná množina a $X \subset A^\omega$. Ve hře $G(X)$ střídavě volí hráči I a II prvky a_i, $i \in \omega$, z množiny A:

$$\begin{array}{lcccccc} I & a_0 & & a_2 & & \dots & \\ II & & a_1 & & a_3 & & \dots \end{array}$$

Hráč I vítězí právě tehdy, když $(a_i) \in X$, jinak vítězí II.

Strategií pro hráče I rozumíme zobrazení $\varphi : A^{<\omega} \to A^{<\omega}$ takové, že

- $\forall s \in A^{<\omega} : |\varphi(s)| = |s| + 1$,
- $\forall s, t \in A^{<\omega},\ s \prec t :\ \varphi(s) \prec \varphi(t)$.

Zobrazení φ určuje tahy hráče I takto: $\varphi(\emptyset) = (a_0)$, $\varphi((a_1)) = (a_0, a_2)$, …

Jiný pohled na strategii pro I Řekneme, že $\sigma \subset A^{<\omega}$ je **strom**, jestliže

$$\forall s, t \in A^{<\omega}, s \prec t :\ t \in \sigma \Rightarrow s \in \sigma.$$

Řekneme, že strom $\sigma \subset A^{<\omega}$ je **prořezaný**, jestliže

$$\forall s \in \sigma\ \exists a \in A :\ s^\wedge a \in \sigma.$$

Strategie pro I je strom $\sigma \subset A^{<\omega}$ takový, že

- σ je neprázdný a prořezaný,
- pokud $(a_0, \dots, a_{2j}) \in \sigma$, pak pro každé $a_{2j+1} \in A$ platí $(a_0, \dots, a_{2j}, a_{2j+1}) \in \sigma$,
- pokud $(a_0, \dots, a_{2j-1}) \in \sigma$, pak pro právě jedno $a_{2j} \in A$ platí $(a_0, \dots, a_{2j-1}, a_{2j}) \in \sigma$.

Strategie σ pro I je **vítězná**, jestliže s ní I vyhraje při libovolné volbě tahů hráče II, neboli

$$[\sigma] := \{x \in A^\omega;\ x|n \in \sigma \text{ pro každé } n \in \omega\} \subset X.$$

Analogicky definujme **strategii pro hráče II** a **vítěznou strategii pro hráče II**.

Poznámka 4.1.1. Ve hře $G(A, X)$ nemohou mít oba hráči vítěznou strategii. Nemusí ji mít ani jeden.

Příklad 4.1.2. Nechť $A = \{0, 1\}$ a $X \subset 2^\omega$ je **Bernsteinova množina**, tj. pro každou perfektní $F \subset 2^\omega$ platí $F \cap X \neq \emptyset$ a $F \cap (2^\omega \setminus X) \neq \emptyset$. Pak v $G(A, X)$ nemá žádný hráč vyhrávající strategii.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $\varphi : 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$ je vítězná strategie pro I. Definujme $\varphi^* : 2^\omega \to 2^\omega$ takto:

$$\varphi^*(a_1, a_3, a_5, \dots) = (a_0, a_1, a_2, \dots),$$

kde $\varphi((a_1, a_3, \ldots, a_{2j-1})) = (a_0, a_2, \ldots, a_{2j})$, $j \in \omega$.

Zobrazení φ^* je spojité, neboť pro libovolná μ, $\nu \in 2^\omega$, $k \in \omega$, splňující $\mu|k = \nu|k$ máme $\varphi(\mu|k) = \varphi(\nu|k)$. Pak ovšem $\varphi^*(2^\omega) \subset X$ je kompaktní (spojitý obraz kompaktu) a nespočetná (prostý obraz 2^ω). Množina X tedy obsahuje neprázdnou perfektní podmnožinu, což je spor s definicí X.

Pokud má dle našeho předpokladu II vítěznou strategii, pak obdržíme spor stejným způsobem. ■

Poznámka 4.1.3. Výše uvedený postup ukazuje, že vítězná strategie určuje jisté spojité zobrazení z A^ω do A^ω, které může mít zajímavé vlastnosti.

Hra s pravidly

Mějme $T \subset A^{<\omega}$ prořezaný strom a $X \subset [T]$.

$$\begin{array}{lccccccc} I & a_0 & & a_2 & & \ldots & \\ II & & a_1 & & a_3 & & \ldots \end{array}$$

Pro každé $n \in \omega$ musí platit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in T$. Strom T určuje tzv. **přípustné pozice**. Vítězství pro I či II a pojem vítězné strategie jsou definovány zřejmým způsobem.

Poznámka 4.1.4. Ve skutečnosti není tato hra „obecnější“ než předchozí. Položíme-li

$$X' = \{x \in A^\omega;\ (\exists n \in \omega :\ x|n \notin T \ \&\ \text{nejmenší } n \in \omega \text{ takové, že } x|n \notin T \text{ je sudé}) \text{ nebo } x \in [T] \cap X\},$$

pak I (resp. II) má vyhrávající strategii v $G(X')$, právě když I (resp. II) má vyhrávající strategii v $G(T, X)$.

4.2. Příklady her

4.2.1. Separační hra $SG(A; B_0, B_1)$. Nechť S, T jsou neprázdné prořezané stromy na ω, $A \subset [S]$ a $B_0, B_1 \subset [T]$.

$$\begin{array}{lccccccc} I & x(0) & & x(1) & & \ldots & \\ II & & y(0) & & y(1) & & \ldots \end{array}$$

Pravidla hry: $x(i), y(i) \in \omega$, $x|n \in S$, $y|n \in T$. Hráč II vítězí právě tehdy, když

$$(x \in A \Rightarrow y \in B_0) \ \&\ (x \notin A \Rightarrow y \in B_1).$$

Hra je užitečným nástrojem při zkoumání borelovských množin. Ještě se k ní vrátíme.

4.2.2. Banach-Mazurova hra $G^{**}(M, Y)$. Nechť M je podmnožinou neprázdného topologického prostoru Y.

$$\begin{array}{lccccccc} I & U_0 & & U_1 & & \ldots & \\ II & & V_0 & & V_1 & & \ldots \end{array}$$

Pravidla hry: U_i, V_i jsou neprázdné otevřené množiny, $U_i \supset V_i \supset U_{i+1}$, $i \in \omega$. Hráč II vítězí právě tehdy, když $\bigcap_{n \in \omega} V_n \subset M$.

4.2.3. Hra bod-přímka (J. Malý). Nechť B je jednotková koule v $\mathbf{R}^2$.

$$\begin{array}{lcccccc} I & a_0 & & a_1 & & \dots & \\ II & & p_0 & & p_1 & & \dots \end{array}$$

Pravidla hry: $a_i \in B$, p_i je přímka v $\mathbf{R}^2$, $a_{i+1} \in p_i$ a $p_i \ni a_i$. Hráč II vítězí právě tehdy, když $(a_i)_{i\in\omega}$ konverguje.

Věta 4.2.1. Hráč II má vítěznou strategii ve hře bod-přímka ([**3**]).

Bez důkazu.

4.3. Determinovanost her

Definice 4.3.1. Řekneme, že hra $G(A, X)$ je **determinovaná**, pokud I nebo II má vítěznou strategii.

Poznámka 4.3.2.

Hráč I vyhraje: $\exists a_0\ \forall a_1 \exists a_2\ \cdots :\ (a_0, a_1, \dots) \in X$.
Hráč II vyhraje: $\forall a_0\ \exists a_1 \forall a_2\ \cdots :\ (a_0, a_1, \dots) \in X$.

Toto ale nejsou korektně utvořené formule!

Věta 4.3.3 (Gale-Stewart, 1953)**.** Nechť $A \neq \emptyset$ a $T \subset A^{<\omega}$ je neprázdný prořezaný strom. Nechť $X \subset [T]$ je uzavřená v $[T]$. Pak $G(T, X)$ je determinována.

Důkaz. Nechť II nemá vítěznou strategii v $G(T, X)$. Budeme hledat vítěznou strategii pro I. Řekneme, že $p = (a_0, \dots, a_{2n-1}) \in T$ je *neprohrávající pozice pro* I, jestliže II nemá vítěznou strategii ve hře s tímto začátkem. Pokud p je taková pozice, pak existuje $a_{2n} \in A$ takové, že

- $(a_0, \dots, a_{2n}) \in T$,
- pro každé $a_{2n+1} \in A$ splňující $(a_0, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}) \in T$ je tato pozice neprohrávající pro hráče I.

Konstrukce vítězné strategie pro I

Hráč I volí své tahy tak, aby se nacházel vždy v neprohrávající pozici. To je možné podle předpokladu neexistence vítězné strategie pro II a výše uvedeného pozorování.

Kdyby tato strategie nebyla vítězná, pak jisté $(a_0, a_1, \dots) \in [T]$, jež bylo sehráno podle uvedené strategie, není v X. Množina $[T] \setminus X$ je otevřená v $[T]$, a tedy pro určité $n \in \omega$ platí $\mathcal{N}(a_0, \dots, a_{2n-1}) \cap [T] \subset [T] \setminus X$. Pak ale hráč II může hrát cokoli podle pravidel a vyhraje, což znamená, že pozice $(a_0, \dots, a_{2n-1})$ není neprohrávající pro I. To je ale spor. ∎

Poznámka 4.3.4. Uzavřenost množiny X je v důkazu věty pro použitou metodu podstatná. Uvažujme následující příklad: $X = 2^\omega \setminus \{(0, 0, 0, \dots)\}$, $A = \{0, 1\}$, $T = 2^{<\omega}$. V partii

$$\begin{array}{lcccccc} I & 0 & & 0 & & \dots & \\ II & & 0 & & 0 & & \dots \end{array}$$

je pozice $(0, 0, \dots, 0)$ vždy neprohrávající pro I, ale nakonec $(0, 0, \dots) \notin X$.

Důsledek 4.3.5. Nechť T je neprázdný prořezaný strom na A. Nechť $X \subset [T]$ je otevřená v $[T]$. Pak $G(T, X)$ je determinovaná.

Důkaz. Buď lze postupovat analogicky předchozímu důkazu nebo necháme I zahrát první tah a_0. Potom uvažujeme novou hru, kde začíná hrát II tahem a_1, atd. Taková hra je podle Věty 4.3.3 determinována a to snadno dává determinovanost původní hry. ∎

Poznámka 4.3.6. Z historie: Hra $G(T, X)$ je determinována pro

- $X \in \boldsymbol{\Pi}_1^0$ (Gale-Stewart, 1953),
- $X \in \boldsymbol{\Pi}_2^0$ (Woolfe, 1955),
- $X \in \boldsymbol{\Pi}_3^0$ (Davis, 1964),
- $X \in \boldsymbol{\Pi}_4^0$ (Paris, 1972).

Věta 4.3.7 (Martin, [**4**])**.** Nechť T je neprázdný prořezaný strom na A a $X \subset [T]$ je borelovská. Pak $G(T, X)$ je determinovaná.

Bez důkazu.

4.4. Perfect Set Theorem a nekonečné hry

Nechť X je neprázdný polský prostor a d je kompatibilní úplná metrika na X. Nechť $\mathcal{V} = (V_n)$ je báze X sestávající z neprázdných otevřených množin a $A \subset X$. Hru $G^*(A)$ definujme takto

$$\begin{array}{lccccc} I & (U_0^{(0)}, U_1^{(0)}) & & (U_0^{(1)}, U_1^{(1)}) & & \dots \\ II & & i_0 & & i_1 & \dots \end{array}$$

kde

- $U_i^{(n)} \in \mathcal{V}$, $\operatorname{diam} U_i^{(n)} < 2^{-n}$,
- $\overline{U_0^{(n)}} \cap \overline{U_1^{(n)}} = \emptyset$,
- $\overline{U_0^{(n+1)} \cup U_1^{(n+1)}} \subset U_{i_n}^{(n)}$,
- $i_n \in \{0, 1\}$.

Prvek $x \in X$ je definován jako $\{x\} = \bigcap_{n \in \omega} U_{i_n}^{(n)}$. Hráč I vítězí, právě když $x \in A$.

Věta 4.4.1. Nechť X je neprázdný perfektní polský prostor a $A \subset X$. Potom

(i) hráč I má vítěznou strategii právě tehdy, když A obsahuje Cantorovu množinu,
(ii) hráč II má vítěznou strategii právě tehdy, když A je spočetná.

Důkaz. (i) Vítězná strategie pro prvního hráče dává schéma $(U_s)_{s \in 2^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}}$ takové, že

- U_s je neprázdná a otevřená,
- $\overline{U_{s^\wedge 0} \cup U_{s^\wedge 1}} \subset U_s$, $\overline{U_{s^\wedge 0}} \cap \overline{U_{s^\wedge 1}} = \emptyset$,
- $\operatorname{diam} U_s < 2^{-|s|+1}$,
- $\forall y \in 2^\omega : \bigcap_{n=1}^\infty U_{y|n}$ je jednoprvková množina obsažená v A.

Odtud snadno plyne, že A obsahuje Cantorovu množinu, totiž $\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{|s|=n} U_s$.

Pokud A obsahuje Cantorovu množinu C, pak stačí, aby I volil vždy jen taková $U_i^{(n)}$, která protínají C. To k vítězství postačuje.

(ii) Předpokládejme, že A je spočetná. Nechť $A = \{x_0, x_1, \dots\}$. Pak II v n-tém tahu volí takové $i_n \in \{0, 1\}$, aby $x_n \notin U_{i_n}^{(n)}$. Potom zřejmě $A \cap \bigcap_{n=1}^\infty U_{i_n}^{(n)} = \emptyset$.

Předpokládejme, že σ je vítězná strategie pro II. Nechť $x \in A$. Řekneme, že pozice

$$p = ((U_0^{(0)}, U_1^{(0)}), i_0, \dots, (U_0^{(n-1)}, U_1^{(n-1)}), i_{n-1})$$

je **dobrá** pro x, jestliže byla hrána podle σ a $x \in U_{i_{n-1}}^{(n-1)}$. Prázdná sekvence je dobrá pro naše x podle definice. Jestliže má každá dobrá posloupnost p pro x vlastní prodloužení, které je dobré pro x, pak existuje sehraná partie podle σ, která vede k bodu $x \in A$, což je ale spor. Pro každé $x \in A$ existuje maximální dobrá posloupnost p pro x. Označme

$$A_p = \{y \in U_{i_{n-1}}^{(n-1)};\ \text{pro každé přípustné pokračování } (U_0^{(n)}, U_1^{(n)}) \text{ platí:}$$
$$\text{je-li } i \text{ tah, který požaduje } \sigma, \text{ pak } y \notin U_i^{(n)}\}.$$

Pak máme $A \subset \bigcup_p A_p$, navíc A_p obsahuje nejvýše jeden bod. Kdyby $y_0, y_1 \in A_p$ a $y_0 \neq y_1$, pak je možné zvolit $U_0^{(n)}$ a $U_1^{(n)}$ tak, že $y_i \in U_i^{(n)}$. Odtud plyne spočetnost A. ∎

Hra G_u^* (unfolded verze hry G^*)

Nechť X je neprázdný perfektní polský prostor, $F \subset X \times \omega^\omega$.

$$\begin{array}{llllll} I & y(0), (U_0^{(0)}, U_1^{(0)}) & & y(1), (U_0^{(1)}, U_1^{(1)}) & & \dots \\ II & & i_0 & & i_1 & \dots \end{array}$$

kde

- $U_i^{(n)}$, i_n jsou jako v předchozí hře,
- $y(n) \in \omega$,
- $x \in X$ je definováno jako v předchozí hře,
- $y = (y(0), y(1), y(2), \dots)$.

Hráč I vítězí, právě když $(x, y) \in F$.

Věta 4.4.2. Nechť X je neprázdný perfektní polský prostor, $F \subset X \times \omega^\omega$ a $A = \pi_X(F)$. Pak

(i) jestliže hráč I má vítěznou strategii v $G_u^*(F)$, pak A obsahuje Cantorovu množinu;
(ii) jestliže hráč II má vítěznou strategii v $G_u^*(F)$, pak A je spočetná.

Důkaz. (i) Pokud má I vyhrávající strategii v $G_u^*(F)$, pak má I vyhrávající strategii i v $G^*(A)$, a tedy A obsahuje Cantorovu množinu podle Věty 4.4.1.

(ii) Nechť nyní má II vítěznou strategii σ v $G_u^*(F)$. Nechť $(x, y_0) \in F$. Podobně jako v předchozím důkazu musí existovat maximální dobrá pozice pro (x, y_0)

$$p = (y_0(0), (U_0^{(0)}, U_1^{(0)}), i_0, \dots, y_0(n-1), (U_0^{(n-1)}, U_1^{(n-1)}), i_{n-1}),$$

tj. $p \in \sigma$ a $x \in U_{i_{n-1}}^{(n-1)}$. Položme

$$A'_{p,a} = \{z \in U_{i_{n-1}}^{n-1};\ \text{pro každé přípustné pokračování } (a, (U_0^{(n)}, U_1^{(n)})),$$
$$\text{jestliže } i \text{ je požadováno strategií } \sigma, \text{ pak } z \notin U_i^{(n)}\}.$$

Pokud $a = y_0(n)$ a p je jako výše, pak máme $x \in A'_{p,a}$. Potom $A \subset \bigcup_{p\in\sigma, a\in\omega} A'_{p,a}$ a každé $A'_{p,a}$ obsahuje nejvýše jeden element. Odtud plyne spočetnost A. ∎

Poznámka 4.4.3.

(i) Předchozí výsledek dává jiný důkaz Perfect Set Theorem.

(ii) Pokud budeme předpokládat determinovanost $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ her, pak dostáváme Perfect Set Theorem pro $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ množiny. Zobrazení

$$(y(0), (U_0^{(0)}, U_1^{(0)}), i_0, \dots) \mapsto (x, y)$$

je totiž spojité.

4.5. Choquetova hra

Nechť X je neprázdný topologický prostor. **Choquetova hra** G_X je definována takto:

$$\begin{array}{lllll} I & U_0 & & U_1 & & \dots \\ II & & V_0 & & V_1 & & \dots \end{array}$$

- U_i, V_i jsou neprázdné otevřené podmnožiny X, $i \in \omega$,
- $U_i \supset V_i \supset U_{i+1}$, $i \in \omega$.

Hráč II vítězí právě tehdy, když $\bigcap_{i\in\omega} V_i \neq \emptyset$.

Definice 4.5.1. Topologický prostor se nazývá **Baireův**, jestliže průnik spočetně mnoha otevřených hustých množin v X je vždy hustý v X.

Věta 4.5.2 (Choquet)**.** Neprázdný topologický prostor je Baireův právě tehdy, když I nemá vítěznou strategii v Choquetově hře G_X.

Důkaz. $\Leftarrow$ Předpokládejme, že X není Baireův. Pak existuje neprázdná otevřená množina U a spočetně mnoho otevřených hustých množin G_n, $n \in \omega$, takových, že $U \cap \bigcap_{n\in\omega} G_n = \emptyset$. Hráč I zahraje v prvním svém tahu $U_0 := U$. Otevřenou množinu U_n, $n > 0$, volí jako $U_n := V_{n-1} \cap G_{n-1}$. Tato množina je otevřená a neprázdná. Takto jsme definovali vítěznou strategii pro I, neboť $\bigcap_{n\in\omega} U_n \subset U \cap \bigcap_{n\in\omega} G_n = \emptyset$.

$\Rightarrow$ Předpokládejme, že I má vítěznou strategii σ. Nechť U_0 je první tah I podle σ. Ukážeme, že prostor U_0 není Baireův. Zkonstruujeme neprázdný prořezaný strom $S \subset \sigma$ takový, že pro $p = (U_0, V_0, \dots, U_n) \in S$ je

$$\mathcal{U}_p = \{U;\ (U_0, V_0, \dots, U_n, V_n, U) \in S\}$$

tvořen disjunktními otevřenými množinami a $\bigcup \mathcal{U}_p$ je husté v U_n. Označme

$$W_n = \bigcup\{U_n;\ (U_0, V_0, \dots, U_n) \in S\}.$$

Množiny W_n jsou husté a otevřené v U_0 pro každé n. Předpokládejme, že $x \in \bigcap_{n\in\omega} W_n$. Pak existuje právě jedna větev $(U_0, V_0, \dots)$ stromu S taková, že $x \in \bigcap_{n\in\omega} U_n$. Pak ale $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$, což je spor s předpokladem o σ. Máme tedy $\bigcap_{n\in\omega} W_n = \emptyset$.

Konstrukce S. Strom S konstruujeme induktivně podle délky větví.

- $\emptyset \in S$
- Pokud máme $(U_0, \dots, U_{n-1}, V_{n-1}) \in S$, pak $(U_0, \dots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) \in S$ je jednoznačně určena strategií σ. Nechť nyní $p = (U_0, \dots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) \in S$. Nechť $\mathcal{V}_p$ je maximální systém neprázdných otevřených podmnožin V_n takový, že $\{V_n^*;\ V_n \in \mathcal{V}_p\}$ je disjunktní, přičemž V_n^* je tah požadovaný jako odpověď na $p^\wedge V_n$. Zařaďme do S všechny posloupnosti $(U_0, \dots, U_n, V_n, V_n^*)$, $V_n \in \mathcal{V}_p$. Množina $\bigcup\{V_n^*;\ V_n \in \mathcal{V}_p\}$ je hustá v U_n. Pokud by totiž existovala $G \subset U_n$ otevřená neprázdná a disjunktní s $\bigcup\{V_n^*;\ V_n \in \mathcal{V}_p\}$, pak $\mathcal{V}_p \cup \{G\}$ dává spor s maximalitou $\mathcal{V}_p$. ∎

Definice 4.5.3. Řekneme, že neprázdný topologický prostor X je **Choquetův**, jestliže má II v Choquetově hře G_X vítěznou strategii.

Poznámka 4.5.4. Věta říká, že „Choquet $\Rightarrow$ Baire".

4.6. Banach-Mazurova věta

Věta 4.6.1 (Banach-Mazur)**.** Nechť X je neprázdný topologický prostor. Množina $A \subset X$ je residuální, právě když II má vítěznou strategii ve hře $G^{**}(A)$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $(W_n)_{n\in\omega}$ je posloupnost otevřených hustých množin v X splňující podmínku $\bigcap_{n\in\omega} W_n \subset A$. Pak hraje-li II v n-tém tahu množinu $V_n := U_n \cap W_n$, tak zvítězí.

$\Leftarrow$ Stejné jako důkaz druhé implikace v důkazu Věty 4.5.2. Předpoklad, že uvažovaná strategie je vítězná, vede k tomu, že průnik otevřených hustých množin W_n, $n \in \omega$, je obsažen v A. ■

4.7. Silná Choquetova hra

Nechť X je neprázdný topologický prostor. **Silná Choquetova hra** G_X^s je definována jako

$$\begin{array}{lccccccc} I & x_0, U_0 & & x_1, U_1 & & \dots & \\ II & & V_0 & & V_1 & & \dots \end{array}$$

přičemž platí

- $x_n \in U_n$, $U_n \subset V_{n+1}$,
- $V_n \subset U_n$, $x_n \in V_n$.

Hráč II vítězí, právě když $\bigcap_{n\in\omega} V_n \neq \emptyset$.

Definice 4.7.1. Neprázdný topologický prostor X se nazývá **silně Choquetův**, jestliže II má vítěznou strategii v G_X^s.

Poznámka 4.7.2. silný Choquet $\Rightarrow$ Choquet $\Rightarrow$ Baire

Věta 4.7.3. Nechť X je neprázdný separabilní metrický prostor a $\hat{X}$ je polský, přičemž X je hustý v $\hat{X}$. Potom

(i) (Oxtoby) Prostor X je Choquetův, právě když X je residuální v $\hat{X}$.
(ii) (Choquet) Prostor X je silně Choquetův, právě když X je polský.

Bez důkazu.

Věta 4.7.4 (Choquet)**.** Neprázdný topologický prostor se spočetnou bází je polský právě tehdy, když je T_1, regulární a silně Choquetův.

Poznámka 4.7.5. Tvrzení poslední věty plyne z předchozího a Urysohnovy metrizační věty: Nechť X je prostor se spočetnou bází. Pak X je metrizovatelný, právě když X je T_1 a regulární.

4.8. Separační hra

Nechť $A, B_0, B_1 \subset \omega^\omega$ a $B_0 \cap B_1 = \emptyset$. Definujme hru $SG(A; B_0, B_1)$ takto:

$$\begin{array}{lcccccc} I & x_0 & & x_1 & & \dots & \\ II & & y_0 & & y_1 & & \dots \end{array}$$

kde $x_n, y_n \in \omega$ pro každé $n \in \omega$. Položme $x = (x_n)$, $y = (y_n)$. Hráč II vítězí, právě když $(x \in A \Rightarrow y \in B_0)$ & $(x \notin A \Rightarrow y \in B_1)$.

Poznámka 4.8.1.

(i) Pokud I má vítěznou strategii v $SG(A; B_0, B_1)$, pak existuje spojité zobrazení $\varphi : \omega^\omega \to \omega^\omega$ takové, že pro libovolné $y \in Y$ platí

$$y \in B_1 \Rightarrow \varphi(y) \in A$$
$$y \in B_0 \Rightarrow \varphi(y) \notin A.$$

Odtud máme $B_1 \subset \varphi^{-1}(A)$ a $B_0 \cap \varphi^{-1}(A) = \emptyset$, neboli $\varphi^{-1}(A)$ separuje B_1 od B_0.

(ii) Jsou-li $A, B_0, B_1 \subset \omega^\omega$ borelovské, pak $SG(A; B_0, B_1)$ je borelovská, a tedy determinovaná. Zobrazení

$$(x_0, y_0, x_1, y_1, \dots) \mapsto x$$
$$(x_0, y_0, x_1, y_1, \dots) \mapsto y$$

jsou totiž spojitá a množina

$$\{(x, y) \in \omega^\omega \times \omega^\omega;\ (x \notin A \vee y \in B_0)\ \&\ (x \in A \vee y \in B_1)\}$$

je borelovská.

Definice 4.8.2. Nechť X, Y jsou topologické prostory a $A \subset X$, $B \subset Y$. Řekneme, že A je **wadgeovsky redukovatelné** do B, jestliže existuje spojité zobrazení $f : X \to Y$ takové, že $f^{-1}(B) = A$. Značíme $(X, A) \leq_W (Y, B)$ nebo jen $A \leq_W B$.

Věta 4.8.3 (Wadge)**.** Nechť $A, B \subset \omega^\omega$ jsou borelovské. Potom $A \leq_W B$ nebo $\omega^\omega \setminus B \leq_W A$.

Důkaz. Uvažujme hru $SG(A; B, \omega^\omega \setminus B)$. Tato hra je determinována. Má-li I vyhrávající strategii, potom $\omega^\omega \setminus B \leq_W A$. Má-li II vyhrávající strategii, potom $A \leq_W B$. ∎

Poznámka 4.8.4.

(i) Relace $\leq_W$ je tranzitivní a reflexivní.
(ii) Pomocí wadgeovských redukcí je možné odhadovat složitost množin zdola.

4.9. Hurewiczova věta

Věta 4.9.1 (Hurewicz)**.** Nechť X je polský, $A \subset X$ je analytická a $B \subset X$ je disjunktní s A. Potom buď existuje množina typu $\boldsymbol{\Sigma}^0_2$ oddělující A od B nebo existuje $C \subset X$ takové, že

- C je homeomorfní s 2^ω,
- $C \cap B$ je spočetná a hustá v C,
- $C \subset A \cup B$.

Důkaz. Označme
$$\mathcal{I} = \{F \subset X;\ F \text{ je uzavřená a disjunktní s } B\}.$$
Podle Soleckého věty 3.2.1 lze tedy A separovat od B pomocí $\boldsymbol{\Sigma}^0_2$ množiny nebo existuje $G \subset A$ typu G_δ taková, že G nelze separovat od B pomocí $\boldsymbol{\Sigma}^0_2$ množiny. Položme
$$H = G \setminus \bigcup\{V \subset X;\ V \text{ je otevřená a } V \cap G \text{ lze separovat od } B \text{ pomocí } \boldsymbol{\Sigma}^0_2 \text{ množiny}\}.$$
Potom platí:

- H je $\boldsymbol{\Pi}^0_2$,
- $\forall V \in \boldsymbol{\Sigma}^0_1(X):\ V \cap H$ nelze separovat od B pomocí $\boldsymbol{\Sigma}^0_2$ množiny.

Z druhé vlastnosti množiny plyne, že $B \cap \overline{H}$ je hustá v $\overline{H}$. Pišme $H = \bigcap_{n\in\omega} H_n$, kde (H_n) je klesající posloupnost otevřených množin. Budeme konstruovat systém koulí $\{B_s;\ s \in 2^{<\omega}\}$ (na X fixujeme kompatibilní úplnou metriku) takový, že

- střed B_s je prvkem $B \cap \overline{H}$ a střed $B_{s^\wedge 0}$ je roven středu koule B_s,
- $B_{s^\wedge 1} \subset H_{|s|+1}$,
- $\overline{B_{s^\wedge 0}} \cap \overline{B_{s^\wedge 1}} = \emptyset$,
- $\overline{B_{s^\wedge 0}} \cup \overline{B_{s^\wedge 1}} \subset B_s$,
- $\operatorname{diam} B_s \leq 2^{-|s|}$.

Konstrukce $\{B_s;\ s \in 2^{<\omega}\}$.

Střed B_s budeme značit x_s.
• Zvolme $x_\emptyset \in B \cap \overline{H}$ libovolně. Poloměr $B_\emptyset$ zvolíme tak, aby $\operatorname{diam} B_\emptyset \leq 1$.

• Předpokládejme, že B_s máme již zkonstruované. Vzhledem k tomu, že $x_s \in \overline{H}$ platí, že $B_s \cap H \neq \emptyset$, a tedy $\overline{B_s \cap H} \cap B$ je hustá v $\overline{B_s \cap H}$. Dále platí, že $\overline{B_s \cap H}$ není jednobodová a $H_{|s|+1} \cap \overline{B_s \cap H}$ je hustá v $\overline{B_s \cap H}$. Existuje tedy bod $x_{s^\wedge 1} \in H_{|s|+1} \cap \overline{B_s \cap H} \cap B$, $x_{s^\wedge 1} \neq x_s$. Položíme $x_{s^\wedge 0} := x_s$ a zvolíme poloměry koulí $B_{s^\wedge 0}$ a $B_{s^\wedge 1}$ dostatečně malé.

Konstrukce a ověření vlastností C.

Položme
$$C = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{|s|=n} B_s \qquad \Big(= \bigcup_{\nu\in 2^\omega} \bigcap_{n\in\omega} B_{\nu|n}\Big).$$

• Množina C je homeomorfní 2^ω. Standardní.

• Položme
$$Q = \{\nu \in 2^\omega;\ \exists n \in \omega\ \forall j \geq n : \nu_j = 0\}.$$
Pokud $\nu \in Q$, pak $\bigcap_{n\in\omega} B_{\nu|n} = \{x_{\nu|n_0}\}$ pro vhodné $n_0 \in \omega$. Potom tedy $\bigcap_{n\in\omega} B_{\nu|n} \subset B$. Pokud $\nu \notin Q$, pak $\bigcap_{n\in\omega} B_{\nu|n} \subset \bigcap_{n\in\omega} H_n \subset H$.

Množina $\bigcup_{\nu\in Q} \bigcap_{n\in\omega} B_{\nu|n}$ je hustá a spočetná. Tím je důkaz proveden. ∎

4.10. Γ-úplnost

Nechť Γ je třída množin v polských prostorech. Řekneme, že množina A je **Γ-hard v Y**, kde Y je polský, jestliže pro každou podmnožinu B libovolného nuldimenzionálního polského prostoru X, která je z Γ, platí $(X, B) \leq_W (Y, A)$. Pokud navíc A je v Γ, potom říkáme, že A je **Γ-úplná (v Y)**.

Poznámka 4.10.1. Γ-hard množina nemusí být Γ-úplná.

Věta 4.10.2. Množina A je $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$-úplná v ω^ω, právě když $A \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(\omega^\omega) \setminus \boldsymbol{\Pi}^0_\xi(\omega^\omega)$.

Důkaz. Víme, že $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(\omega^\omega) \neq \boldsymbol{\Pi}^0_\xi(\omega^\omega)$, a proto $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$-úplnost implikuje $A \notin \boldsymbol{\Pi}^0_\xi(\omega^\omega)$.

Nechť $A \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(\omega^\omega) \setminus \boldsymbol{\Pi}^0_\xi(\omega^\omega)$ a $B \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\xi(X)$, kde X je nuldimenzionální polský prostor. Vzhledem k tomu, že X lze uvažovat jako podprostor ω^ω, pak podle Wadgeovy věty máme $B \leq_W A$ nebo $\omega^\omega \setminus B \geq_W A$. Druhá možnost však nemůže nastat. ■

4.11. Dvě aplikace

Věta 4.11.1.

(i) Nechť $A \subset \omega^\omega$ je třídy $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$ a není $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi$. Potom množina

$$P := \{\alpha \in (\omega^\omega)^\omega;\ \forall n \in \omega :\ \alpha(n) \in A\}$$

je v $\boldsymbol{\Pi}^0_{\xi+1}((\omega^\omega)^\omega) \setminus \boldsymbol{\Sigma}^0_{\xi+1}(\omega^\omega)^\omega)$.

(ii) Nechť $B \subset \omega^\omega$ je třídy $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi$ a není $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$. Potom množina

$$S := \{\alpha \in (\omega^\omega)^\omega;\ \exists n \in \omega :\ \alpha(n) \in B\}$$

Důkaz. (i) Množina P je zřejmě $\boldsymbol{\Pi}^0_{\xi+1}(\omega^\omega)^\omega$. Zvolme množinu $C \subset \omega^\omega$, která je v $\boldsymbol{\Pi}^0_{\xi+1}$ a není v $\boldsymbol{\Sigma}^0_{\xi+1}$. Pišme $C = \bigcap_{n\in\omega} C_n$, kde $C_n \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$. Pak existují $\varphi_n : X \to \omega^\omega$ taková, že $\varphi_n^{-1}(A) = C_n$ (Věta 4.11.1).

Definujme $\varphi : \omega^\omega \to \omega^\omega$ takto $\varphi(x) = (\varphi_n(x))_{n\in\omega}$. Potom je φ je spojité a $\varphi^{-1}(P) = C$. Množina P tedy není $\boldsymbol{\Sigma}^0_{\xi+1}$.

(ii) Postup je obdobný. ■

Věta 4.11.2. Množina $\mathcal{K}(\mathbf{Q})$ je $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-úplná v $\mathcal{K}(2^\omega)$, kde

$$\mathbf{Q} = \{\alpha \in 2^\omega;\ \exists n \in \omega\ \forall j \geq n :\ \alpha_j = 0\}.$$

Důkaz. • *$\mathcal{K}(\mathbf{Q})$ je $\boldsymbol{\Pi}^1_1$.*

Platí:

$$K \in \mathcal{K}(2^\omega) \setminus \mathcal{K}(\mathbf{Q}) \Leftrightarrow \exists \alpha \in 2^\omega :\ \alpha \in K \mathbin{\&} \alpha \in 2^\omega \setminus \mathbf{Q}.$$

Platí tedy

$$\mathcal{K}(2^\omega) \setminus \mathcal{K}(\mathbf{Q}) = \boldsymbol{\Sigma}^1_1(\mathcal{K}(2^\omega)).$$

• *$\mathcal{K}(\mathbf{Q})$ je $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-hard.*

Nechť $C \subset X$ je $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ a X je nuldimenzionální polský prostor. Pak existuje množina $H \subset X \times 2^\omega$ typu $\boldsymbol{\Pi}^0_2$ taková, že $\Pi_X(H) = X \setminus C$. Potom existuje spojité zobrazení $\varphi : X \times 2^\omega \to 2^\omega$

takové, že $\varphi^{-1}(\mathbf{Q}) = X \times 2^\omega \setminus H$, neboť $\mathbf{Q}$ je $\boldsymbol{\Sigma}^0_2$-úplná. Zobrazení $F : X \to \mathcal{K}(2^\omega)$ definujeme takto

$$F(x) = \varphi(\{x\} \times 2^\omega).$$

Platí $F^{-1}(\mathcal{K}(\mathbf{Q})) = C$. ∎

Literatura

[1] Ajtai, M. and Kechris, A. S., The set of continuous functions with everywhere convergent Fourier series, Trans. Amer. Math. Soc. **302**, 1987, 207–221.

[2] Kechris, A. S., *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics **156**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[3] Malý, J. and Zelený, M., *A note on Buczolich's solution of the Weil gradient problem: a construction based on an infinite game*, Acta Math. Hungar. **113**, 2006, 145–158.

[4] Martin, D. A., *A purely inductive proof of Borel determinacy, Recursion theory (Ithaca*, N.Y., 1982), Proc. Sympos. Pure Math. **42**, 303–308, Amer. Math. Soc. 1985.

[5] Solecki, S., Covering analytic sets by families of closed sets, J. Symbolic Logic **59**, 1994, 1022–1031.