

1. Spektrální poloměr

Definice

Nechť X je komplexní Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$.

Spektrální poloměr operátoru T je definován předpisem

$$r(T) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Věta 1.1 (Beurling)

Nechť X je komplexní Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$.

Potom $r(T) = \lim_n \|T^n\|^{1/n}$.

2. Operátory na Hilbertových prostorech

V tomto oddíle symbol H vždy značí komplexní Hilbertův prostor.

Definice

Řekneme, že $T \in \mathcal{L}(H)$ je

- **normální**, pokud $T^*T = TT^*$,
- **samoadjungovaný** (nebo také **hermiteovský**), pokud $T^* = T$,
- **unitární**, pokud $T^*T = I = TT^*$,
- **ortogonální projekce**, pokud T je projekce (tj. $T = T^2$) a $\text{Rng } T \perp \text{Ker } T$.

2. Operátory na Hilbertových prostorech

Lemma 2.1

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$. Potom

- (i) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2,$
- (ii) $\text{Ker } T^* = \text{Rng } T^\perp.$

2. Operátory na Hilbertových prostorech

Lemma 2.1

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$. Potom

- (i) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$,
- (ii) $\text{Ker } T^* = \text{Rng } T^\perp$.

Lemma 2.2

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak je ekvivalentní

- (i) $T = 0$,
- (ii) $(Tx, x) = 0$ pro každé $x \in H$.

2. Operátory na Hilbertových prostorech

Důsledek 2.3

Nechť $S, T \in \mathcal{L}(X)$ pro každé $x \in H$ splňují $(Sx, x) = (Tx, x)$. Potom $T = S$.

2. Operátory na Hilbertových prostorech

Důsledek 2.3

Nechť $S, T \in \mathcal{L}(X)$ pro každé $x \in H$ splňují $(Sx, x) = (Tx, x)$. Potom $T = S$.

Věta 2.4 (charakterizace normálních operátorů)

*Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální právě tehdy, když $\|Tx\| = \|T^*x\|$ pro každé $x \in H$.*

2. Operátory na Hilbertových prostorech

Věta 2.5 (vlastnosti normálních operátorů)

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Potom

- (1) $\text{Ker } T = \text{Ker } T^*$,
- (2) T invertovatelný, právě když je **zdola omezený**, tj. existuje $c > 0$ takové, že $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pro každé $x \in H$ (Weyl),
- (3) pokud pro $x \in H$ platí $Tx = \lambda x$, potom $T^*x = \bar{\lambda}x$,
- (4) pokud $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ jsou různá vlastní čísla T , pak $\text{Ker}(\lambda_1 I - T) \perp \text{Ker}(\lambda_2 I - T)$,
- (5) $\|T^2\| = \|T\|^2$,
- (6) $\|T\| = r(T)$.

2. Operátory na Hilbertových prostorech

Věta 2.6 (charakterizace samoadjungovaných operátorů)

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$. Potom $T = T^$, právě když (Tx, x) je reálné číslo pro každé $x \in H$.*

2. Operátory na Hilbertových prostorech

Věta 2.6 (charakterizace samoadjungovaných operátorů)

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$. Potom $T = T^$, právě když (Tx, x) je reálné číslo pro každé $x \in H$.*

Věta 2.7

Nechť $S, T \in \mathcal{L}(H)$ a S je samoadjungovaný. Pak $\text{Rng } S \perp \text{Rng } T$, právě když $ST = 0$.

2. Operátory na Hilbertových prostorech

Věta 2.6 (charakterizace samoadjungovaných operátorů)

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$. Potom $T = T^$, právě když (Tx, x) je reálné číslo pro každé $x \in H$.*

Věta 2.7

Nechť $S, T \in \mathcal{L}(H)$ a S je samoadjungovaný. Pak $\text{Rng } S \perp \text{Rng } T$, právě když $ST = 0$.

Věta 2.8

Pro každé $T \in \mathcal{L}(H)$ existuje právě jeden rozklad $T = S_1 + iS_2$, kde S_1, S_2 jsou samoadjungované operátory.

2. Operátory na Hilbertových prostorech

Definice

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$. **Numerický range** operátoru T je definován předpisem

$$N(T) = \{(Tx, x); x \in S_H\}.$$

2. Operátory na Hilbertových prostorech

Definice

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$. **Numerický range** operátoru T je definován předpisem

$$N(T) = \{(Tx, x); x \in S_H\}.$$

Věta 2.9 (Hilbert–Toeplitz)

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$. Potom $\sigma(T) \subset \overline{N(T)}$.

2. Operátory na Hilbertových prostorech

Věta 2.10 (spektrum samodajungovaného operátoru)

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je samoadjungovaný. Potom $N(T) \subset \mathbf{R}$ a označíme-li $m_T = \inf N(T)$, $M_T = \sup N(T)$, pak platí

- (i) $\sigma(T) \subset [m_T, M_T]$,
- (ii) $\|T\|$ nebo $-\|T\|$ leží v $\sigma(T)$,
- (iii) $m_T, M_T \in \sigma(T)$.

2. Operátory na Hilbertových prostorech

Věta 2.11 (charakterizace unitárních operátorů)

Nechť $U \in \mathcal{L}(H)$. Pak je ekvivalentní:

- (i) *U je unitární,*
- (ii) *$\text{Rng } U = H$ a $(Ux, Uy) = (x, y)$, $x, y \in H$,*
- (iii) *$\text{Rng } U = H$ a $\|Ux\| = \|x\|$, $x \in H$.*

2. Operátory na Hilbertových prostorech

Věta 2.12 (charakterizace ortogonálních projekcí)

Nechť $P \in \mathcal{L}(H)$ je projekce. Pak je ekvivalentní:

- (i) P je samoadjungovaná,*
- (ii) P je normální,*
- (iii) P je ortogonální,*
- (iv) $(Px, x) = \|Px\|^2, x \in H.$*

2. Operátory na Hilbertových prostorech

Věta 2.13 (spektrální rozklad kompaktního normálního operátoru; Hilbert–Schmidt)

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je kompaktní a normální. Pak existuje ortonormální báze H tvořená vlastními vektory T . Dále existují nenulová vlastní čísla $\{\lambda_n\}$ a ortonormální báze $\{e_n\}$ prostoru $\overline{\text{Rng } T}$ takové, že

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x, e_n)e_n, \quad x \in H.$$

3. Vektorová integrace

Definice

Nechť K je kompaktní metrický prostor, X je Banachův prostor a $f: K \rightarrow X$ je spojitě zobrazení a μ je Radonova míra na K .

3. Vektorová integrace

Definice

Nechť K je kompaktní metrický prostor, X je Banachův prostor a $f: K \rightarrow X$ je spojitě zobrazení a μ je Radonova míra na K . Necht' $x \in X$. Jestliže platí

$$\forall x^* \in X^* : x^*(x) = \int_K (x^* \circ f)(t) d\mu(t),$$

3. Vektorová integrace

Definice

Nechť K je kompaktní metrický prostor, X je Banachův prostor a $f: K \rightarrow X$ je spojitě zobrazení a μ je Radonova míra na K . Nechť $x \in X$. Jestliže platí

$$\forall x^* \in X^* : x^*(x) = \int_K (x^* \circ f)(t) d\mu(t),$$

pak říkáme, že **Pettisův integrál funkce f** je roven x . Hodnotu integrálu značíme $\int_K f d\mu$.

3. Vektorová integrace

Lemma 3.1

Nechť X je Banachův prostor a $F \subset X$ je kompaktní.

(i) Potom je $\overline{\text{co}} F$ kompaktní.

3. Vektorová integrace

Lemma 3.1

Nechť X je Banachův prostor a $F \subset X$ je kompaktní.

- (i) Potom je $\overline{co} F$ kompaktní.*
- (ii) Pokud navíc $\dim X < \infty$, pak je $co F$ kompaktní.*

3. Vektorová integrace

Věta 3.2

Nechť K je kompaktní metrický prostor, X je Banachův prostor, $f: K \rightarrow X$ je spojitě zobrazení a μ je pravděpodobnostní Radonova míra na K . Potom existuje právě jedno $x \in \overline{\text{co}} f(K)$ takové, že $x = \int_K f \, d\mu$.

3. Vektorová integrace

Věta 3.3

Nechť K je kompaktní metrický prostor, X je Banachův prostor, $f: K \rightarrow X$ je spojitě zobrazení a μ je Radonova míra na K .

3. Vektorová integrace

Věta 3.3

Nechť K je kompaktní metrický prostor, X je Banachův prostor, $f: K \rightarrow X$ je spojitě zobrazení a μ je Radonova míra na K . Potom platí:

- (i) *integrál $\int_K f \, d\mu$ existuje,*

3. Vektorová integrace

Věta 3.3

Nechť K je kompaktní metrický prostor, X je Banachův prostor, $f: K \rightarrow X$ je spojitě zobrazení a μ je Radonova míra na K . Potom platí:

- (i) integrál $\int_K f \, d\mu$ existuje,*
- (ii) je-li Y Banachův a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak*
$$\int_K (T \circ f) \, d\mu = T\left(\int_K f \, d\mu\right),$$

3. Vektorová integrace

Věta 3.3

Nechť K je kompaktní metrický prostor, X je Banachův prostor, $f: K \rightarrow X$ je spojitě zobrazení a μ je Radonova míra na K . Potom platí:

- (i) integrál $\int_K f \, d\mu$ existuje,*
- (ii) je-li Y Banachův a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak*
$$\int_K (T \circ f) \, d\mu = T \left(\int_K f \, d\mu \right),$$
- (iii) $\| \int_K f \, d\mu \| \leq \int_K \| f \| \, d\mu.$*

4. Analytický kalkulus

4. Analytický kalkulus

Fakta z komplexní analýzy

Věta (Cauchy)

Nechť $\Omega \subset \mathbf{C}$, $f \in \text{Hol}(\Omega)$ a Γ je cyklus v Ω splňující $\text{ind}_{\Gamma} \alpha = 0$ pro $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \Omega$. Potom platí:

$$(i) \quad f(\lambda) \text{ind}_{\Gamma} \lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-\lambda} dw, \quad \lambda \in \Omega \setminus \langle \Gamma \rangle,$$

4. Analytický kalkulus

Fakta z komplexní analýzy

Věta (Cauchy)

Nechť $\Omega \subset \mathbf{C}$, $f \in \text{Hol}(\Omega)$ a Γ je cyklus v Ω splňující $\text{ind}_{\Gamma} \alpha = 0$ pro $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \Omega$. Potom platí:

- (i) $f(\lambda) \text{ind}_{\Gamma} \lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-\lambda} dw$, $\lambda \in \Omega \setminus \langle \Gamma \rangle$,
- (ii) $\int_{\Gamma} f(w) dw = 0$,

4. Analytický kalkulus

Fakta z komplexní analýzy

Věta (Cauchy)

Nechť $\Omega \subset \mathbf{C}$, $f \in \text{Hol}(\Omega)$ a Γ je cyklus v Ω splňující $\text{ind}_{\Gamma} \alpha = 0$ pro $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \Omega$. Potom platí:

- (i) $f(\lambda) \text{ind}_{\Gamma} \lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-\lambda} dw$, $\lambda \in \Omega \setminus \langle \Gamma \rangle$,*
- (ii) $\int_{\Gamma} f(w) dw = 0$,*
- (iii) jsou-li Γ_1, Γ_2 cykly v Ω splňující $\text{ind}_{\Gamma_1} \alpha = \text{ind}_{\Gamma_2} \alpha$ pro každé $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \Omega$, potom $\int_{\Gamma_1} f(w) dw = \int_{\Gamma_2} f(w) dw$.*

4. Analytický kalkulus

Věta

Nechť $K \subset \Omega \subset \mathbf{C}$, K je kompaktní a Ω je otevřená.

Potom existuje cyklus Γ v Ω takový, že

(i) $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega \setminus K,$

4. Analytický kalkulus

Věta

Nechť $K \subset \Omega \subset \mathbf{C}$, K je kompaktní a Ω je otevřená.

Potom existuje cyklus Γ v Ω takový, že

- (i) $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega \setminus K$,
- (ii) $\text{ind}_{\Gamma} \alpha = \begin{cases} 1, & \alpha \in K, \\ 0, & \alpha \in \mathbf{C} \setminus \Omega. \end{cases}$

4. Analytický kalkulus

Definice

Má-li Γ vlastnosti (i)-(ii) z předchozí věty, pak řekneme, že Γ **ohraničuje** K v Ω .

4. Analytický kalkulus

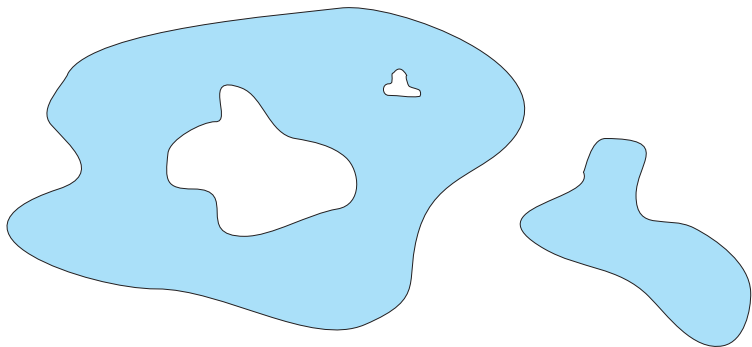
Definice

Má-li Γ vlastnosti (i)-(ii) z předchozí věty, pak řekneme, že Γ **ohraničuje** K v Ω .

Označení

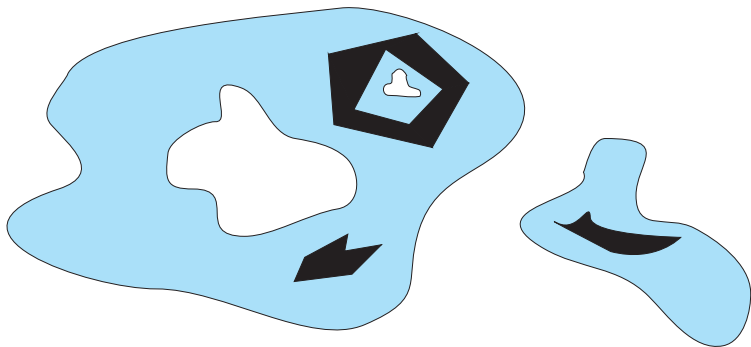
Nechť $K \subset \mathbf{C}$ je kompaktní. Potom symbolem $\text{Hol}(K)$ budeme značit všechny komplexní funkce, které jsou holomorfní na nějaké otevřené množině $\Omega \supset K$.

\mathbb{C}



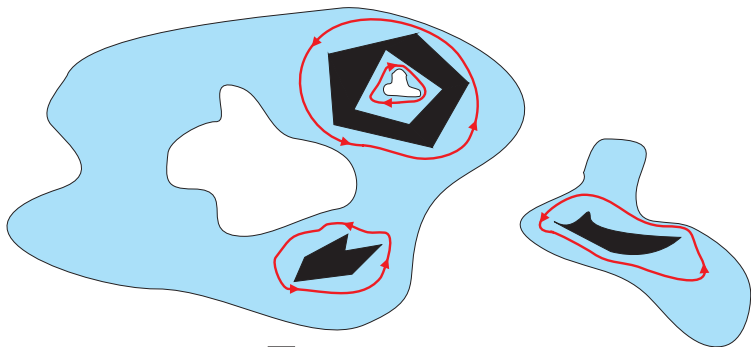
Ω

C



Ω

\mathbb{C}



Γ

Ω

4. Analytický kalkulus

Označení

Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$. Označme

$$R_z = (zI - T)^{-1}, \quad z \in \rho(T).$$

4. Analytický kalkulus

Označení

Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$. Označme

$$R_z = (zI - T)^{-1}, \quad z \in \rho(T).$$

Lemma 4.1

Nechť $T, S \in \mathcal{L}(X)$.

- (i) *Jestliže S komutuje s T , potom komutuje s R_z pro každé $z \in \rho(T)$.*

4. Analytický kalkulus

Označení

Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$. Označme

$$R_z = (zI - T)^{-1}, \quad z \in \rho(T).$$

Lemma 4.1

Nechť $T, S \in \mathcal{L}(X)$.

- (i) *Jestliže S komutuje s T , potom komutuje s R_z pro každé $z \in \rho(T)$.*
- (ii) *Pro každé $w, z \in \rho(T)$ platí*

$$R_w - R_z = (z - w)R_z \circ R_w. \quad (\text{rezolventní identita})$$

4. Analytický kalkulus

Věta 4.2 (existence analytického kalkulu)

Necht' $T \in \mathcal{L}(X)$ a $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. Položme

$$f(T) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) R_z dz,$$

kde Γ je cyklus ohraničující $\sigma(T)$ v $D(f)$.

4. Analytický kalkulus

Věta 4.2 (existence analytického kalkulu)

Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ a $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. Položme

$$f(T) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) R_z dz,$$

kde Γ je cyklus ohraničující $\sigma(T)$ v $D(f)$. Zobrazení $\Phi: f \mapsto f(T)$ z $\text{Hol}(\sigma(T))$ do $\mathcal{L}(X)$ je dobře definované a nezávisí na volbě Γ .

4. Analytický kalkulus

Věta 4.3 (vlastnosti analytického kalkulu)

Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ a $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. Potom platí

$$(1) \quad (1)(T) = I \text{ a } \text{id}(T) = T,$$

4. Analytický kalkulus

Věta 4.3 (vlastnosti analytického kalkulu)

Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ a $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. Potom platí


(1) $(1)(T) = I$ a $\text{id}(T) = T$,

(2) Φ je algebraický homomorfismus z $\text{Hol}(\sigma(T))$ do $\mathcal{L}(X)$, 

4. Analytický kalkulus

Věta 4.3 (vlastnosti analytického kalkulu)


Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ a $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. Potom platí

- (1) $(1)(T) = I$ a $\text{id}(T) = T$,
- (2) Φ je algebraický homomorfismus z $\text{Hol}(\sigma(T))$ do $\mathcal{L}(X)$, 
- (3) *jestliže $f_n \in \text{Hol}(D(f))$ a $f_n \rightrightarrows_{loc} f$ na $D(f)$, potom $f_n(T) \rightarrow f(T)$ v $\mathcal{L}(X)$,*

4. Analytický kalkulus

Věta 4.3 (vlastnosti analytického kalkulu)


Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ a $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. Potom platí

- (1) $(1)(T) = I$ a $\text{id}(T) = T$,
- (2) Φ je algebraický homomorfismus z $\text{Hol}(\sigma(T))$ do $\mathcal{L}(X)$, 
- (3) jestliže $f_n \in \text{Hol}(D(f))$ a $f_n \rightrightarrows_{loc} f$ na $D(f)$, potom $f_n(T) \rightarrow f(T)$ v $\mathcal{L}(X)$,
- (4) $f(T)$ je invertibilní, právě když $f \neq 0$ na $\sigma(T)$,

4. Analytický kalkulus

Věta 4.3 (vlastnosti analytického kalkulu)



Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ a $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. Potom platí

- (1) $(1)(T) = I$ a $\text{id}(T) = T$,
- (2) Φ je algebraický homomorfismus z $\text{Hol}(\sigma(T))$ do $\mathcal{L}(X)$, 
- (3) jestliže $f_n \in \text{Hol}(D(f))$ a $f_n \rightrightarrows_{loc} f$ na $D(f)$, potom $f_n(T) \rightarrow f(T)$ v $\mathcal{L}(X)$,
- (4) $f(T)$ je invertibilní, právě když $f \neq 0$ na $\sigma(T)$,
- (5) $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ (věta o obrazu spektra),

4. Analytický kalkulus

Věta 4.3 (vlastnosti analytického kalkulu)



Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ a $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. Potom platí

- (1) $(1)(T) = I$ a $\text{id}(T) = T$,
- (2) Φ je algebraický homomorfismus z $\text{Hol}(\sigma(T))$ do $\mathcal{L}(X)$, 
- (3) jestliže $f_n \in \text{Hol}(D(f))$ a $f_n \rightrightarrows_{loc} f$ na $D(f)$, potom $f_n(T) \rightarrow f(T)$ v $\mathcal{L}(X)$,
- (4) $f(T)$ je invertibilní, právě když $f \neq 0$ na $\sigma(T)$,
- (5) $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ (věta o obrazu spektra),
- (6) $(g \circ f)(T) = g(f(T))$ pro $g \in \text{Hol}(\sigma(f(T)))$, 

4. Analytický kalkulus

Věta 4.3 (vlastnosti analytického kalkulu)



Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ a $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. Potom platí

- (1) $(1)(T) = I$ a $\text{id}(T) = T$,
- (2) Φ je algebraický homomorfismus z $\text{Hol}(\sigma(T))$ do $\mathcal{L}(X)$, 
- (3) jestliže $f_n \in \text{Hol}(D(f))$ a $f_n \rightrightarrows_{loc} f$ na $D(f)$, potom $f_n(T) \rightarrow f(T)$ v $\mathcal{L}(X)$,
- (4) $f(T)$ je invertibilní, právě když $f \neq 0$ na $\sigma(T)$,
- (5) $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ (věta o obrazu spektra),
- (6) $(g \circ f)(T) = g(f(T))$ pro $g \in \text{Hol}(\sigma(f(T)))$, 
- (7) **pokud $S \in \mathcal{L}(X)$ komutuje s T , pak $Sf(T) = f(T)S$,**

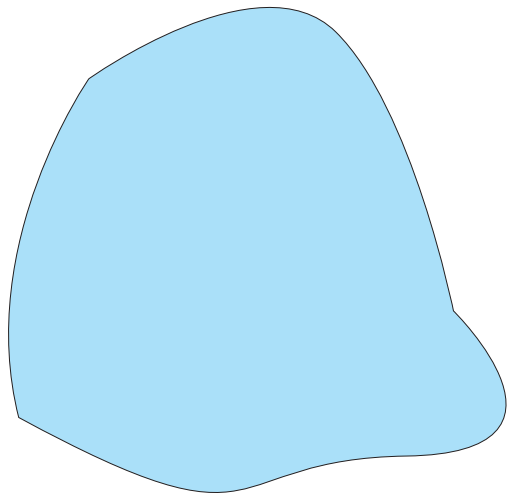
4. Analytický kalkulus

Věta 4.3 (vlastnosti analytického kalkulu)

Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ a $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. Potom platí

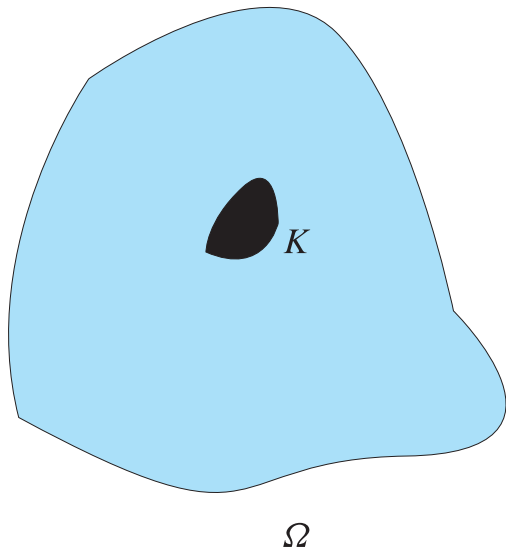
- (1) $(1)(T) = I$ a $\text{id}(T) = T$,
- (2) Φ je algebraický homomorfismus z $\text{Hol}(\sigma(T))$ do $\mathcal{L}(X)$, 
- (3) jestliže $f_n \in \text{Hol}(D(f))$ a $f_n \rightrightarrows_{loc} f$ na $D(f)$, potom $f_n(T) \rightarrow f(T)$ v $\mathcal{L}(X)$,
- (4) $f(T)$ je invertibilní, právě když $f \neq 0$ na $\sigma(T)$,
- (5) $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ (věta o obrazu spektra),
- (6) $(g \circ f)(T) = g(f(T))$ pro $g \in \text{Hol}(\sigma(f(T)))$, 
- (7) pokud $S \in \mathcal{L}(X)$ komutuje s T , pak $Sf(T) = f(T)S$,
- (8) $(f(T))' = f(T')$.

K důkazu $f(T)g(T) = fg(T)$.

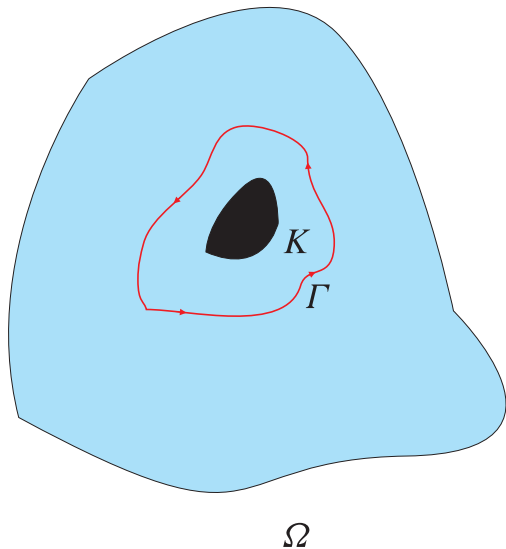


Ω

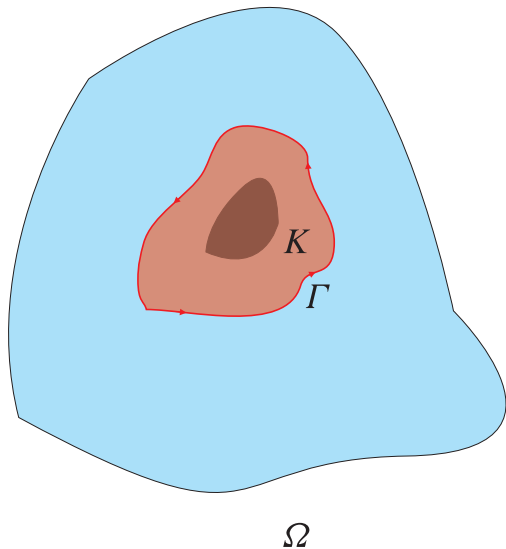
K důkazu $f(T)g(T) = fg(T)$.



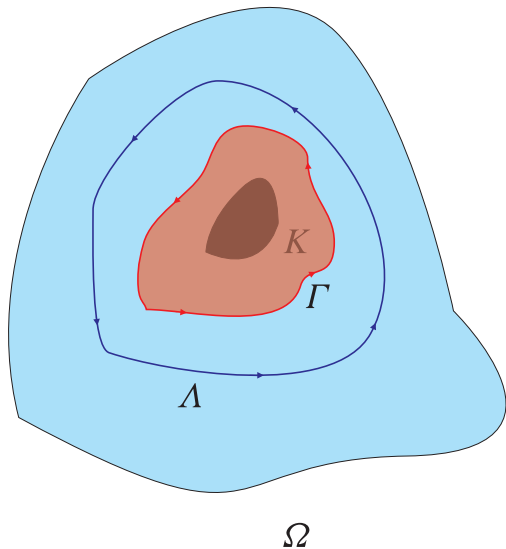
K důkazu $f(T)g(T) = fg(T)$.



K důkazu $f(T)g(T) = fg(T)$.



K dŭkazu $f(T)g(T) = fg(T)$.



K důkazu $f(T)g(T) = fg(T)$.

$$f(T) \circ g(T) = -\frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{\Gamma} f(z) R_z dz \right) \circ \left(\int_{\Lambda} g(w) R_w dw \right)$$

K důkazu $f(T)g(T) = fg(T)$.

$$\begin{aligned} f(T) \circ g(T) &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{\Gamma} f(z) R_z dz \right) \circ \left(\int_{\Lambda} g(w) R_w dw \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(f(z) R_z \circ \left(\int_{\Lambda} g(w) R_w dw \right) \right) dz \end{aligned}$$

K důkazu $f(T)g(T) = fg(T)$.

$$\begin{aligned} f(T) \circ g(T) &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{\Gamma} f(z) R_z dz \right) \circ \left(\int_{\Lambda} g(w) R_w dw \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(f(z) R_z \circ \left(\int_{\Lambda} g(w) R_w dw \right) \right) dz \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Lambda} f(z) g(w) R_z \circ R_w dw \right) dz \end{aligned}$$

K důkazu $f(T)g(T) = fg(T)$.

$$\begin{aligned} f(T) \circ g(T) &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{\Gamma} f(z) R_z dz \right) \circ \left(\int_{\Lambda} g(w) R_w dw \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(f(z) R_z \circ \left(\int_{\Lambda} g(w) R_w dw \right) \right) dz \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Lambda} f(z) g(w) R_z \circ R_w dw \right) dz \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Lambda} f(z) g(w) \frac{R_z - R_w}{w - z} dw \right) dz \end{aligned}$$

K důkazu $f(T)g(T) = fg(T)$.

$$\begin{aligned} f(T) \circ g(T) &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{\Gamma} f(z) R_z dz \right) \circ \left(\int_{\Lambda} g(w) R_w dw \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(f(z) R_z \circ \left(\int_{\Lambda} g(w) R_w dw \right) \right) dz \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Lambda} f(z) g(w) R_z \circ R_w dw \right) dz \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Lambda} f(z) g(w) \frac{R_z - R_w}{w - z} dw \right) dz \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(f(z) R_z \int_{\Lambda} \frac{g(w)}{w - z} dw \right) dz + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Lambda} \frac{f(z) g(w)}{w - z} R_w dw \right) dz \end{aligned}$$

K důkazu $f(T)g(T) = fg(T)$.

$$\begin{aligned} f(T) \circ g(T) &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{\Gamma} f(z) R_z dz \right) \circ \left(\int_{\Lambda} g(w) R_w dw \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(f(z) R_z \circ \left(\int_{\Lambda} g(w) R_w dw \right) \right) dz \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Lambda} f(z) g(w) R_z \circ R_w dw \right) dz \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Lambda} f(z) g(w) \frac{R_z - R_w}{w - z} dw \right) dz \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(f(z) R_z \int_{\Lambda} \frac{g(w)}{w - z} dw \right) dz + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Lambda} \frac{f(z) g(w)}{w - z} R_w dw \right) dz \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(f(z) R_z \int_{\Lambda} \frac{g(w)}{w - z} dw \right) dz + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Lambda} \left(\int_{\Gamma} \frac{f(z) g(w)}{w - z} R_w dz \right) dw \end{aligned}$$

K důkazu $f(T)g(T) = fg(T)$.

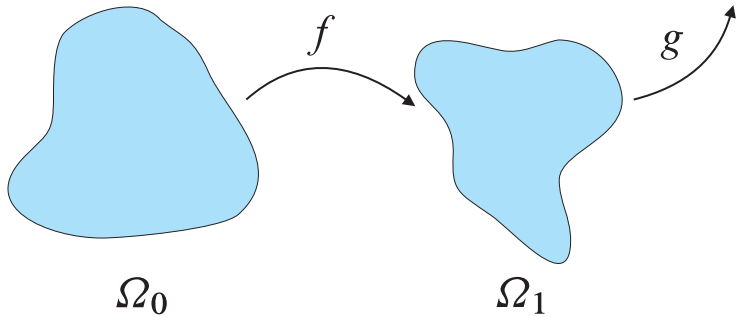
$$\begin{aligned}f(T) \circ g(T) &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{\Gamma} f(z)R_z dz \right) \circ \left(\int_{\Lambda} g(w)R_w dw \right) \\&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(f(z)R_z \circ \left(\int_{\Lambda} g(w)R_w dw \right) \right) dz \\&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Lambda} f(z)g(w)R_z \circ R_w dw \right) dz \\&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Lambda} f(z)g(w) \frac{R_z - R_w}{w - z} dw \right) dz \\&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(f(z)R_z \int_{\Lambda} \frac{g(w)}{w - z} dw \right) dz + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Lambda} \frac{f(z)g(w)}{w - z} R_w dw \right) dz \\&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(f(z)R_z \int_{\Lambda} \frac{g(w)}{w - z} dw \right) dz + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Lambda} \left(\int_{\Gamma} \frac{f(z)g(w)}{w - z} R_w dz \right) dw \\&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(f(z)R_z \int_{\Lambda} \frac{g(w)}{w - z} dw \right) dz + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Lambda} \left(g(w)R_w \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{w - z} dz \right) dw\end{aligned}$$

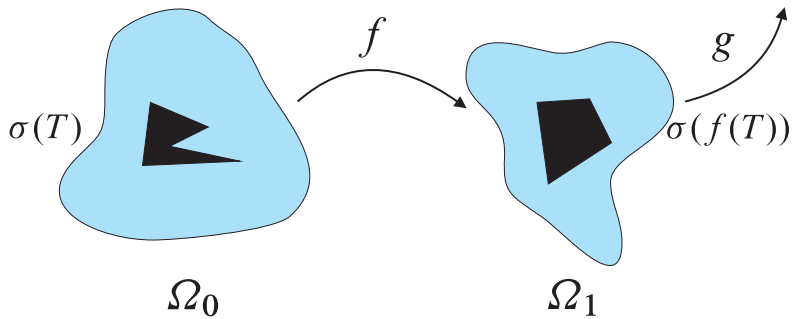
K důkazu $f(T)g(T) = fg(T)$.

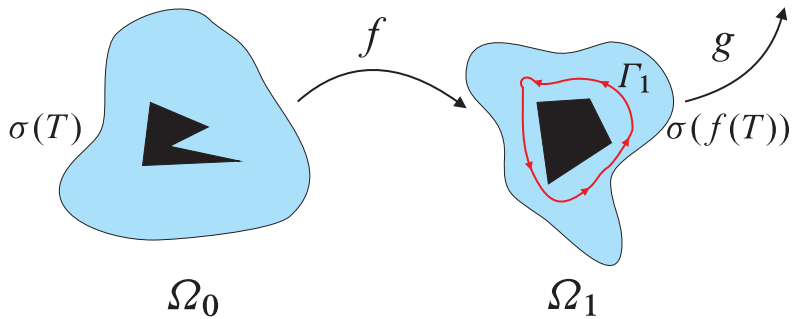
$$\begin{aligned}f(T) \circ g(T) &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{\Gamma} f(z)R_z dz \right) \circ \left(\int_{\Lambda} g(w)R_w dw \right) \\&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(f(z)R_z \circ \left(\int_{\Lambda} g(w)R_w dw \right) \right) dz \\&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Lambda} f(z)g(w)R_z \circ R_w dw \right) dz \\&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Lambda} f(z)g(w) \frac{R_z - R_w}{w - z} dw \right) dz \\&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(f(z)R_z \int_{\Lambda} \frac{g(w)}{w - z} dw \right) dz + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Lambda} \frac{f(z)g(w)}{w - z} R_w dw \right) dz \\&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(f(z)R_z \int_{\Lambda} \frac{g(w)}{w - z} dw \right) dz + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Lambda} \left(\int_{\Gamma} \frac{f(z)g(w)}{w - z} R_w dz \right) dw \\&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(f(z)R_z \int_{\Lambda} \frac{g(w)}{w - z} dw \right) dz + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Lambda} \left(g(w)R_w \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{w - z} dz \right) dw \\&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)g(z)R_z dz = (fg)(T)\end{aligned}$$

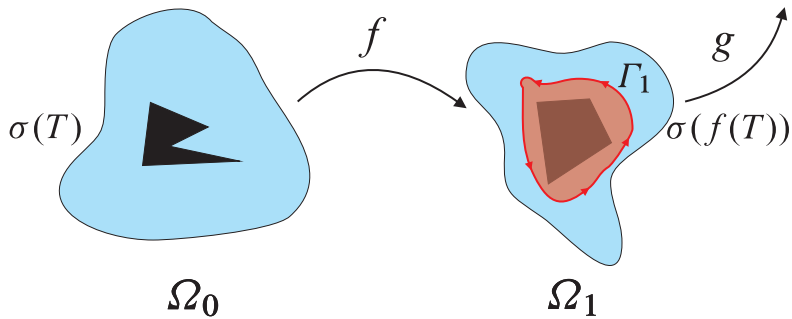
K důkazu $f(T)g(T) = fg(T)$.

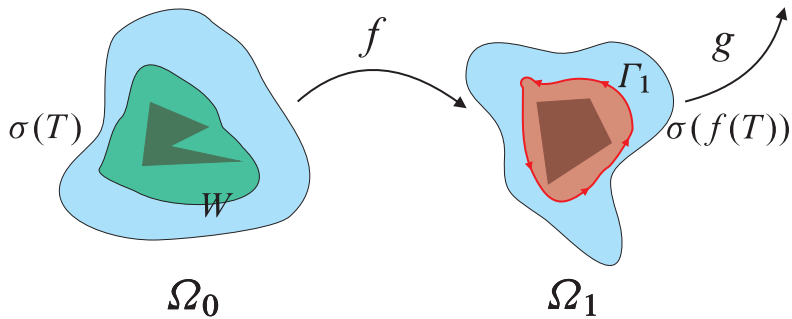
$$\begin{aligned}f(T) \circ g(T) &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{\Gamma} f(z)R_z dz \right) \circ \left(\int_{\Lambda} g(w)R_w dw \right) \\&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(f(z)R_z \circ \left(\int_{\Lambda} g(w)R_w dw \right) \right) dz \\&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Lambda} f(z)g(w)R_z \circ R_w dw \right) dz \\&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Lambda} f(z)g(w) \frac{R_z - R_w}{w - z} dw \right) dz \\&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(f(z)R_z \int_{\Lambda} \frac{g(w)}{w - z} dw \right) dz + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Lambda} \frac{f(z)g(w)}{w - z} R_w dw \right) dz \\&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(f(z)R_z \int_{\Lambda} \frac{g(w)}{w - z} dw \right) dz + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Lambda} \left(\int_{\Gamma} \frac{f(z)g(w)}{w - z} R_w dz \right) dw \\&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \left(f(z)R_z \int_{\Lambda} \frac{g(w)}{w - z} dw \right) dz + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Lambda} \left(g(w)R_w \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{w - z} dz \right) dw \\&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)g(z)R_z dz = (fg)(T) \quad \text{▶}$$

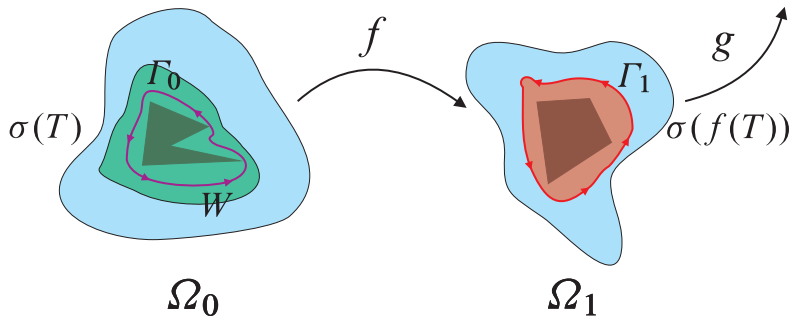












4. Analytický kalkulus

Věta 4.4

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$, kde H je Hilbertův, a $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$.

Potom platí:

(i) $f(T)^* = \tilde{f}(T^*)$, kde $\tilde{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$,

4. Analytický kalkulus

Věta 4.4

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$, kde H je Hilbertův, a $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$.

Potom platí:

- (i) $f(T)^* = \tilde{f}(T^*)$, kde $\tilde{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$,*
- (ii) je-li T je normální, pak $f(T)$ je normální.*

4. Analytický kalkulus

Věta 4.5 (logaritmus a odmocnina)

Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ a 0 leží v neomezené komponentě

$\mathbf{C} \setminus \sigma(T)$. Potom

- (i) existuje $S \in \mathcal{L}(X)$, že $\exp(S) = T$, neboli existuje
logaritmus T ,*

4. Analytický kalkulus

Věta 4.5 (logaritmus a odmocnina)

Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ a 0 leží v neomezené komponentě $\mathbf{C} \setminus \sigma(T)$. Potom

- (i) existuje $S \in \mathcal{L}(X)$, že $\exp(S) = T$, neboli existuje logaritmus T ,*
- (ii) $\sqrt[n]{T}$ existuje pro každé $n \in \mathbf{N}$.*

5. Spojitý kalkulus

Lemma 5.1

Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$ normální a $p: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ má tvar

$p(z) = \sum_{k,l=0}^n a_{kl} z^k \bar{z}^l$. Potom operátor

$p(T) := \sum_{k,l=0}^n a_{kl} T^k (T^*)^l$ splňuje $\|p(T)\| = \|p\|_{C(\sigma(T))}$.

5. Spojitý kalkulus

Věta 5.2

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak existuje spojitý kalkulus $\Psi: \mathcal{C}(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ s následujícími vlastnostmi:

(1) $\Psi(p) = p(T)$ pro $p(z) = \sum a_{kl} z^k \bar{z}^l$,

5. Spojitý kalkulus

Věta 5.2

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak existuje spojitý kalkulus $\Psi: \mathcal{C}(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ s následujícími vlastnostmi:

- (1) $\Psi(p) = p(T)$ pro $p(z) = \sum a_{kl} z^k \bar{z}^l$,*
- (2) Ψ je algebraický izomorfismus do $\mathcal{L}(H)$,
 $\Psi(\bar{f}) = (\Psi(f))^*$ a $\|\Psi(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|f\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$,*

5. Spojitý kalkulus

Věta 5.2

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak existuje spojitý kalkulus $\Psi: \mathcal{C}(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ s následujícími vlastnostmi:

- (1) $\Psi(p) = p(T)$ pro $p(z) = \sum a_{kl} z^k \bar{z}^l$,*
- (2) Ψ je algebraický izomorfismus do $\mathcal{L}(H)$,
 $\Psi(\bar{f}) = (\Psi(f))^*$ a $\|\Psi(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|f\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$,*
- (3) $\Psi(f) = f(T)$ pro $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$,*

5. Spojitý kalkulus

Věta 5.2

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak existuje spojitý kalkulus $\Psi: \mathcal{C}(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ s následujícími vlastnostmi:

- (1) $\Psi(p) = p(T)$ pro $p(z) = \sum a_{kl} z^k \bar{z}^l$,
- (2) Ψ je algebraický izomorfismus do $\mathcal{L}(H)$,
 $\Psi(\bar{f}) = (\Psi(f))^*$ a $\|\Psi(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|f\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$,
- (3) $\Psi(f) = f(T)$ pro $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$,
- (4) $\sigma(\Psi(f)) = f(\sigma(T))$ pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$,

5. Spojitý kalkulus

Věta 5.2

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak existuje spojitý kalkulus $\Psi: \mathcal{C}(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ s následujícími vlastnostmi:

- (1) $\Psi(p) = p(T)$ pro $p(z) = \sum a_{kl} z^k \bar{z}^l$,*
- (2) Ψ je algebraický izomorfismus do $\mathcal{L}(H)$,
 $\Psi(\bar{f}) = (\Psi(f))^*$ a $\|\Psi(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|f\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$,*
- (3) $\Psi(f) = f(T)$ pro $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$,*
- (4) $\sigma(\Psi(f)) = f(\sigma(T))$ pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$,*
- (5) $\Psi(f)$ je normální pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$,*

5. Spojitý kalkulus

Věta 5.2

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak existuje spojitý kalkulus $\Psi: \mathcal{C}(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ s následujícími vlastnostmi:

- (1) $\Psi(p) = p(T)$ pro $p(z) = \sum a_{kl} z^k \bar{z}^l$,
- (2) Ψ je algebraický izomorfismus do $\mathcal{L}(H)$,
 $\Psi(\bar{f}) = (\Psi(f))^*$ a $\|\Psi(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|f\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$,
- (3) $\Psi(f) = f(T)$ pro $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$,
- (4) $\sigma(\Psi(f)) = f(\sigma(T))$ pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$,
- (5) $\Psi(f)$ je normální pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$,
- (6) $\Psi(f)$ je samoadjungovaný, právě když f je reálná,

5. Spojitý kalkulus

Věta 5.2

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak existuje spojitý kalkulus $\Psi: \mathcal{C}(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ s následujícími vlastnostmi:

- (1) $\Psi(p) = p(T)$ pro $p(z) = \sum a_{kl} z^k \bar{z}^l$,*
- (2) Ψ je algebraický izomorfismus do $\mathcal{L}(H)$,
 $\Psi(\bar{f}) = (\Psi(f))^*$ a $\|\Psi(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|f\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$,*
- (3) $\Psi(f) = f(T)$ pro $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$,*
- (4) $\sigma(\Psi(f)) = f(\sigma(T))$ pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$,*
- (5) $\Psi(f)$ je normální pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$,*
- (6) $\Psi(f)$ je samoadjungovaný, právě když f je reálná,*
- (7) $\Psi(g \circ f) = g(\Psi(f))$ pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$, $g \in \mathcal{C}(f(\sigma(T)))$,
kde $g(\Psi(f))$ značí spojitý kalkulus pro $\Psi(f)$,*

5. Spojitý kalkulus

Věta 5.2

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak existuje spojitý kalkulus $\Psi: \mathcal{C}(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ s následujícími vlastnostmi:

- (1) $\Psi(p) = p(T)$ pro $p(z) = \sum a_{kl} z^k \bar{z}^l$,*
- (2) Ψ je algebraický izomorfismus do $\mathcal{L}(H)$,
 $\Psi(\bar{f}) = (\Psi(f))^*$ a $\|\Psi(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|f\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$,*
- (3) $\Psi(f) = f(T)$ pro $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$,*
- (4) $\sigma(\Psi(f)) = f(\sigma(T))$ pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$,*
- (5) $\Psi(f)$ je normální pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$,*
- (6) $\Psi(f)$ je samoadjungovaný, právě když f je reálná,*
- (7) $\Psi(g \circ f) = g(\Psi(f))$ pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$, $g \in \mathcal{C}(f(\sigma(T)))$,
kde $g(\Psi(f))$ značí spojitý kalkulus pro $\Psi(f)$,*
- (8) jestliže S komutuje s T , potom S komutuje s $\Psi(f)$.*

6. Borelovský kalkulus

Lemma 6.1

Nechť $B: H \times H \rightarrow \mathbf{C}$ je v první souřadnici lineární a ve druhé sdruženě lineární a necht'

$$M := \sup_{x,y \in B_H} |B(x,y)| < \infty$$

Pak existuje právě jeden $T \in \mathcal{L}(H)$ takový, že $B(x,y) = (Tx,y)$ pro $x,y \in H$ a $\|T\| = M$.

6. Borelovský kalkulus

Označení

Nechť P je metrický prostor, pak $\mathcal{B}^b(P)$ značí množinu všech omezených borelovských funkcí z P do \mathbf{C} . Množinu $\mathcal{B}^b(P)$ opatříme supremovou normou.

6. Borelovský kalkulus

Označení

Nechť P je metrický prostor, pak $\mathcal{B}^b(P)$ značí množinu všech omezených borelovských funkcí z P do \mathbf{C} . Množinu $\mathcal{B}^b(P)$ opatříme supremovou normou.

Lemma 6.2

Nechť P je kompaktní metrický prostor a \mathcal{A} je nejmenší systém komplexních funkcí na P , který obsahuje spojité funkce a je uzavřený vzhledem k bodovým limitám omezených posloupností. Potom $\mathcal{A} = \mathcal{B}^b(P)$.

6. Borelovský kalkulus

Věta 6.3

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak existuje borelovský kalkulus $\Theta: \mathcal{B}^b(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ takový, že

(1) $\Theta = \Psi$ na $\mathcal{C}(\sigma(T))$,

6. Borelovský kalkulus

Věta 6.3

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak existuje borelovský kalkulus $\Theta: \mathcal{B}^b(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ takový, že

- (1) $\Theta = \Psi$ na $\mathcal{C}(\sigma(T))$,*
- (2) jestliže $f_n \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$, $f_n \rightarrow f$ a $\{f_n\}$ je omezená, potom pro každé $x, y \in H$ platí*
$$(\Theta(f_n)x, y) \rightarrow (\Theta(f)x, y),$$

6. Borelovský kalkulus

Věta 6.3

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak existuje borelovský kalkulus $\Theta: \mathcal{B}^b(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ takový, že

- (1) $\Theta = \Psi$ na $\mathcal{C}(\sigma(T))$,
- (2) jestliže $f_n \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$, $f_n \rightarrow f$ a $\{f_n\}$ je omezená, potom pro každé $x, y \in H$ platí $(\Theta(f_n)x, y) \rightarrow (\Theta(f)x, y)$,
- (3) Θ je algebraický homomorfismus, $(\Theta(f))^* = \Theta(\bar{f})$, $\|\Theta(f)\| \leq \|f\|_{\mathcal{B}^b(\sigma(T))}$,

6. Borelovský kalkulus

Věta 6.3

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak existuje borelovský kalkulus $\Theta: \mathcal{B}^b(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ takový, že

- (1) $\Theta = \Psi$ na $\mathcal{C}(\sigma(T))$,
- (2) *jestliže $f_n \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$, $f_n \rightarrow f$ a $\{f_n\}$ je omezená, potom pro každé $x, y \in H$ platí*
 $(\Theta(f_n)x, y) \rightarrow (\Theta(f)x, y)$,
- (3) Θ je algebraický homomorfismus, $(\Theta(f))^* = \Theta(\bar{f})$,
 $\|\Theta(f)\| \leq \|f\|_{\mathcal{B}^b(\sigma(T))}$,
- (4) $\Theta(f)$ je normální pro $f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$,

6. Borelovský kalkulus

Věta 6.3

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak existuje borelovský kalkulus $\Theta: \mathcal{B}^b(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ takový, že

- (1) $\Theta = \Psi$ na $\mathcal{C}(\sigma(T))$,*
- (2) jestliže $f_n \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$, $f_n \rightarrow f$ a $\{f_n\}$ je omezená, potom pro každé $x, y \in H$ platí
 $(\Theta(f_n)x, y) \rightarrow (\Theta(f)x, y)$,*
- (3) Θ je algebraický homomorfismus, $(\Theta(f))^* = \Theta(\bar{f})$,
 $\|\Theta(f)\| \leq \|f\|_{\mathcal{B}^b(\sigma(T))}$,*
- (4) $\Theta(f)$ je normální pro $f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$,*
- (5) pokud $f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$ je reálná, pak $\Theta(f)$ je samoadjungovaný,*

6. Borelovský kalkulus

Věta 6.3

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak existuje borelovský kalkulus $\Theta: \mathcal{B}^b(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ takový, že

- (1) $\Theta = \Psi$ na $\mathcal{C}(\sigma(T))$,
- (2) jestliže $f_n \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$, $f_n \rightarrow f$ a $\{f_n\}$ je omezená, potom pro každé $x, y \in H$ platí $(\Theta(f_n)x, y) \rightarrow (\Theta(f)x, y)$,
- (3) Θ je algebraický homomorfismus, $(\Theta(f))^* = \Theta(\bar{f})$, $\|\Theta(f)\| \leq \|f\|_{\mathcal{B}^b(\sigma(T))}$,
- (4) $\Theta(f)$ je normální pro $f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$,
- (5) pokud $f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$ je reálná, pak $\Theta(f)$ je samoadjungovaný,
- (6) pokud S komutuje s T , potom S komutuje s $\Theta(f)$ pro $f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$.

7. Spektrální rozklad normálního operátoru

Označení

Nechť K je metrický prostor. Systém všech borelovských podmnožin K označme $\text{Borel}(K)$.

7. Spektrální rozklad normálního operátoru

Definice

Nechť K je kompaktní metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $E: \text{Borel}(K) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ je **spektrální míra**, pokud platí:

- (i) pro každou $B \in \text{Borel}(K)$ je $E(B)$ ortogonální projekce, $E(\emptyset) = 0$, $E(K) = I$,

7. Spektrální rozklad normálního operátoru

Definice

Nechť K je kompaktní metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $E: \text{Borel}(K) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ je **spektrální míra**, pokud platí:

- (i) pro každou $B \in \text{Borel}(K)$ je $E(B)$ ortogonální projekce, $E(\emptyset) = 0$, $E(K) = I$,
- (ii) $E(B_1 \cap B_2) = E(B_1)E(B_2)$ pro každé $B_1, B_2 \in \text{Borel}(K)$,

7. Spektrální rozklad normálního operátoru

Definice

Nechť K je kompaktní metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $E: \text{Borel}(K) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ je **spektrální míra**, pokud platí:

- (i) pro každou $B \in \text{Borel}(K)$ je $E(B)$ ortogonální projekce, $E(\emptyset) = 0$, $E(K) = I$,
- (ii) $E(B_1 \cap B_2) = E(B_1)E(B_2)$ pro každé $B_1, B_2 \in \text{Borel}(K)$,
- (iii) $E(B_1 \cup B_2) = E(B_1) + E(B_2)$ pro každé $B_1, B_2 \in \text{Borel}(K)$ disjunktní,

7. Spektrální rozklad normálního operátoru

Definice

Nechť K je kompaktní metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $E: \text{Borel}(K) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ je **spektrální míra**, pokud platí:

- (i) pro každou $B \in \text{Borel}(K)$ je $E(B)$ ortogonální projekce, $E(\emptyset) = 0$, $E(K) = I$,
- (ii) $E(B_1 \cap B_2) = E(B_1)E(B_2)$ pro každé $B_1, B_2 \in \text{Borel}(K)$,
- (iii) $E(B_1 \cup B_2) = E(B_1) + E(B_2)$ pro každé $B_1, B_2 \in \text{Borel}(K)$ disjunktní,
- (iv) pro každé $x \in H$ je zobrazení $E_{x,x}: B \mapsto (E(B)x, x)$ Radonova míra na K .

7. Spektrální rozklad normálního operátoru

Věta 7.1

Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$ normální, pak $E: \text{Borel}(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ definované jako $E(B) = \Theta(\chi_B)$ je spektrální míra a platí:

(i) $\forall x \in H \forall f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T)) : (\Theta(f)x, x) = \int_{\sigma(T)} f \, dE_{x,x},$

7. Spektrální rozklad normálního operátoru

Věta 7.1

Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$ normální, pak $E: \text{Borel}(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ definované jako $E(B) = \Theta(\chi_B)$ je spektrální míra a platí:

- (i) $\forall x \in H \forall f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T)) : (\Theta(f)x, x) = \int_{\sigma(T)} f \, dE_{x,x},$
- (ii) pro $A \in \text{Borel}(\sigma(T))$ a $T_A := T|_{\text{Rng } E(A)}$ je $T_A \in \mathcal{L}(\text{Rng } E(A))$ a $\sigma(T_A) \subset \bar{A},$

7. Spektrální rozklad normálního operátoru

Věta 7.1

Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$ normální, pak $E: \text{Borel}(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ definované jako $E(B) = \Theta(\chi_B)$ je spektrální míra a platí:

- (i) $\forall x \in H \forall f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T)) : (\Theta(f)x, x) = \int_{\sigma(T)} f \, dE_{x,x},$
- (ii) pro $A \in \text{Borel}(\sigma(T))$ a $T_A := T|_{\text{Rng } E(A)}$ je $T_A \in \mathcal{L}(\text{Rng } E(A))$ a $\sigma(T_A) \subset \bar{A},$
- (iii) pro každou otevřenou neprázdnou $G \subset \sigma(T)$ je $E(G) \neq 0.$

7. Spektrální rozklad normálního operátoru

Věta 7.2

Nechť E je spektrální míra na neprázdném kompaktním metrickém prostoru K . Pro každou funkci $f \in \mathcal{B}^b(Y)$ existuje právě jeden $T(f) \in \mathcal{L}(H)$ splňující

$(T(f)x, x) = \int_K f \, dE_{x,x}$ pro každé $x \in H$. Dále platí:

- (i) zobrazení $T: f \mapsto T(f)$ je lineární, multiplikativní, $\|T\| = 1$ a $T(\bar{f}) = (T(f))^*$,*

7. Spektrální rozklad normálního operátoru

Věta 7.2

Nechť E je spektrální míra na neprázdném kompaktním metrickém prostoru K . Pro každou funkci $f \in \mathcal{B}^b(Y)$ existuje právě jeden $T(f) \in \mathcal{L}(H)$ splňující

$(T(f)x, x) = \int_K f \, dE_{x,x}$ pro každé $x \in H$. Dále platí:

- (i) zobrazení $T: f \mapsto T(f)$ je lineární, multiplikativní, $\|T\| = 1$ a $T(\bar{f}) = (T(f))^*$,
- (ii) $\|T(f)x\|^2 = \int_K |f|^2 \, dE_{x,x}$, $x \in H$.

7. Spektrální rozklad normálního operátoru

Věta 7.2

Nechť E je spektrální míra na neprázdném kompaktním metrickém prostoru K . Pro každou funkci $f \in \mathcal{B}^b(Y)$ existuje právě jeden $T(f) \in \mathcal{L}(H)$ splňující

$(T(f)x, x) = \int_K f \, dE_{x,x}$ pro každé $x \in H$. Dále platí:

- (i) zobrazení $T: f \mapsto T(f)$ je lineární, multiplikativní, $\|T\| = 1$ a $T(\bar{f}) = (T(f))^*$,
- (ii) $\|T(f)x\|^2 = \int_K |f|^2 \, dE_{x,x}$, $x \in H$.

Označení

Značíme $T(f) = \int f \, dE$.

7. Spektrální rozklad normálního operátoru

Věta 7.3

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Potom existuje právě jedna spektrální míra E na $\sigma(T)$ taková, že $T = \int_{\sigma(T)} t \, dE$.

7. Spektrální rozklad normálního operátoru

Věta 7.3

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Potom existuje právě jedna spektrální míra E na $\sigma(T)$ taková, že $T = \int_{\sigma(T)} t \, dE$.

Věta 7.4

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální a $\lambda \in \sigma(T)$. Potom platí:

(i) $\text{Rng } E(\{\lambda\}) = \text{Ker}(\lambda I - T),$

7. Spektrální rozklad normálního operátoru

Věta 7.3

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Potom existuje právě jedna spektrální míra E na $\sigma(T)$ taková, že $T = \int_{\sigma(T)} t \, dE$.

Věta 7.4

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální a $\lambda \in \sigma(T)$. Potom platí:

- (i) $\text{Rng } E(\{\lambda\}) = \text{Ker}(\lambda I - T)$,
- (ii) $\lambda \in \sigma_p(T)$, právě když $E(\{\lambda\}) \neq 0$,

7. Spektrální rozklad normálního operátoru

Věta 7.3

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Potom existuje právě jedna spektrální míra E na $\sigma(T)$ taková, že $T = \int_{\sigma(T)} t \, dE$.

Věta 7.4

Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální a $\lambda \in \sigma(T)$. Potom platí:

- (i) $\text{Rng } E(\{\lambda\}) = \text{Ker}(\lambda I - T)$,
- (ii) $\lambda \in \sigma_p(T)$, právě když $E(\{\lambda\}) \neq 0$,
- (iii) *jestliže je λ izolovaný bod $\sigma(T)$, potom $\lambda \in \sigma_p(T)$.*

8. Distribuce – základní pojmy

Definice

Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $K \subset \Omega$ je kompaktní.

(i) Prostorem **testovacích funkcí** na Ω rozumíme

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega); \text{supp } \varphi \text{ je kompaktní podmnožina } \Omega\}.$$

Dále označme

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega); \text{supp } \varphi \subset K\}.$$

8. Distribuce – základní pojmy

Definice

Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $K \subset \Omega$ je kompaktní.

(i) Prostorem **testovacích funkcí** na Ω rozumíme

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega); \text{supp } \varphi \text{ je kompaktní podmnožina } \Omega\}.$$

Dále označme

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega); \text{supp } \varphi \subset K\}.$$

(ii) Jestliže $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}_0^n$, potom

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \text{ a}$$

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

8. Distribuce – základní pojmy

(iii) Definujme dále

$$\|\varphi\|_N = \sup\{|D^\alpha \varphi(\mathbf{x})|; \mathbf{x} \in \Omega, |\alpha| \leq N\}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

8. Distribuce – základní pojmy

Lemma 8.1

Necht' $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Potom je integrál

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x - y)g(y) dy$$

*konečný s.v. a $f * g$ patří do $L^1(\mathbf{R}^n)$.*

8. Distribuce – základní pojmy

Definice

Nechť $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Potom funkci $f * g$ nazýváme **konvolucí** funkcí f a g .

8. Distribuce – základní pojmy

Definice

Nechť $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Potom funkci $f * g$ nazýváme **konvolucí** funkcí f a g .

Věta 8.2 (vlastnosti konvoluce)

Nechť $f, g, h \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Potom platí.

(i) $f * g = g * f$ (komutativita),

8. Distribuce – základní pojmy

Definice

Nechť $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Potom funkci $f * g$ nazýváme **konvolucí** funkcí f a g .

Věta 8.2 (vlastnosti konvoluce)

Nechť $f, g, h \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Potom platí.

- (i) $f * g = g * f$ (komutativita),
- (ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (asociativita),

8. Distribuce – základní pojmy

Definice

Nechť $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Potom funkci $f * g$ nazýváme **konvolucí** funkcí f a g .

Věta 8.2 (vlastnosti konvoluce)

Nechť $f, g, h \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Potom platí.

- (i) $f * g = g * f$ (komutativita),
- (ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (asociativita),
- (iii) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$,

8. Distribuce – základní pojmy

Definice

Nechť $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Potom funkci $f * g$ nazýváme **konvolucí** funkcí f a g .

Věta 8.2 (vlastnosti konvoluce)

Nechť $f, g, h \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Potom platí.

- (i) $f * g = g * f$ (komutativita),
- (ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (asociativita),
- (iii) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$,
- (iv) jsou-li navíc f a g spojité s kompaktním nosičem, pak $\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$,

8. Distribuce – základní pojmy

Definice

Nechť $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Potom funkci $f * g$ nazýváme **konvolucí** funkcí f a g .

Věta 8.2 (vlastnosti konvoluce)

Nechť $f, g, h \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Potom platí.

- (i) $f * g = g * f$ (komutativita),
- (ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (asociativita),
- (iii) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$,
- (iv) jsou-li navíc f a g spojitě s kompaktním nosičem, pak $\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$,
- (v) pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ a $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ platí $D^\alpha(f * \varphi) = f * D^\alpha\varphi$.

8. Distribuce – základní pojmy

Definice

- (i) Řekneme, že posloupnost (φ_k) funkcí z $\mathcal{D}(\Omega)$ **konverguje k** $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ **v** $\mathcal{D}(\Omega)$, jestliže existuje kompaktní $K \subset \Omega$ takový, že
- (a) $\text{supp } \varphi_k \subset K$ pro každé $k \in \mathbf{N}$,
 - (b) $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ na K pro každé $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$.

8. Distribuce – základní pojmy

Definice

- (i) Řekneme, že posloupnost (φ_k) funkcí z $\mathcal{D}(\Omega)$ **konverguje k** $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ **v** $\mathcal{D}(\Omega)$, jestliže existuje kompakt $K \subset \Omega$ takový, že
- (a) $\text{supp } \varphi_k \subset K$ pro každé $k \in \mathbf{N}$,
 - (b) $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ na K pro každé $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$.
- (ii) **Distribucí na** Ω rozumíme lineární zobrazení $\Lambda: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbf{C}$ takové, že $\Lambda(\varphi_k) \rightarrow \Lambda(\varphi)$, kdykoliv $\varphi_k \rightarrow \varphi$ v $\mathcal{D}(\Omega)$. Množinu všech distribucí značíme $\mathcal{D}'(\Omega)$.

8. Distribuce – základní pojmy

Lemma 8.3

Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní. Položme

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \min\{\|\varphi - \psi\|_N, 1\}, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Potom

(i) $(\mathcal{D}_K(\Omega), d)$ je úplný metrický prostor,

8. Distribuce – základní pojmy

Lemma 8.3

Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní. Položme

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \min\{\|\varphi - \psi\|_N, 1\}, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Potom

- (i) $(\mathcal{D}_K(\Omega), d)$ je úplný metrický prostor,*
- (ii) posloupnost (φ_k) funkcí z $\mathcal{D}_K(\Omega)$ konverguje k $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ v $\mathcal{D}(\Omega)$ právě tehdy, když $d(\varphi_k, \varphi) \rightarrow 0$.*

8. Distribuce – základní pojmy

Lemma 8.4

Necht' $\Lambda: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbf{C}$ je lineární. Potom je ekvivalentní:

- (i) $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

8. Distribuce – základní pojmy

Lemma 8.4

Nechť $\Lambda: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbf{C}$ je lineární. Potom je ekvivalentní:

- (i) $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$,
- (ii) pro každý kompakt $K \subset \Omega$ existují $N \in \mathbf{N}_0$ a $C > 0$ taková, že

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : |\Lambda\varphi| \leq C\|\varphi\|_N.$$

8. Distribuce – základní pojmy

Definice

Nechť $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Jestliže existuje $N \in \mathbf{N}_0$ takové, že pro každý kompaktní $K \subset \Omega$ existuje $C \in \mathbf{R}$ splňující

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : |\Lambda\varphi| \leq C\|\varphi\|_N,$$

potom nejmenší N s touto vlastností nazýváme **řádem distribuce** Λ . Pokud takové N neexistuje, pak řád Λ definujeme jako nekonečno.

8. Distribuce – základní pojmy

Lemma 8.5

Necht' $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ a $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Potom zobrazení z $\mathcal{D}(\Omega)$ do \mathbf{C} definovaná předpisem

$$\varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \varphi) \quad \text{a} \quad \varphi \mapsto \Lambda(f\varphi)$$

jsou distribuce.

8. Distribuce – základní pojmy

Definice

Distribuce z předchozího lemmatu nazýváme po řadě **derivací řádu α distribuce Λ a součinem funkce f a distribuce Λ** . Značíme je $D^\alpha \Lambda$ a $f\Lambda$.

8. Distribuce – základní pojmy

Definice

Distribuce z předchozího lemmatu nazýváme po řadě **derivací řádu α distribuce Λ a součinem funkce f a distribuce Λ** . Značíme je $D^\alpha \Lambda$ a $f\Lambda$.

Věta 8.6

Jestliže f je absolutně spojitá funkce na intervalu (a, b) , potom $(\Lambda_f)' = \Lambda_{f'}$.

8. Distribuce – základní pojmy

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{\Lambda_k\}$ distribucí z $\mathcal{D}'(\Omega)$ **konverguje k distribuci** $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, jestliže $\Lambda_k \varphi \rightarrow \Lambda \varphi$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Věta 8.7

Nechť X je úplný metrický prostor, Y je metrický prostor, $f_n: X \rightarrow Y$, $f_n \rightarrow f$ a f_n jsou spojité. Pak existuje bod spojitosti f .

8. Distribuce – základní pojmy

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{\Lambda_k\}$ distribucí z $\mathcal{D}'(\Omega)$ **konverguje k distribuci** $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, jestliže $\Lambda_k \varphi \rightarrow \Lambda \varphi$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Věta 8.7

Nechť X je úplný metrický prostor, Y je metrický prostor, $f_n: X \rightarrow Y$, $f_n \rightarrow f$ a f_n jsou spojité. Pak existuje bod spojitosti f .

Věta 8.8 (Banach-Steinhausova věta pro distribuce)

Nechť $\Lambda_k \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $k \in \mathbf{N}$, a $\Lambda_k(\varphi) \rightarrow \Lambda(\varphi)$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Potom $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a $D^\alpha \Lambda_k \rightarrow D^\alpha \Lambda$ pro každé α .

9. Fourierova transformace

Definice

Nechť $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$. **Fourierovu transformaci** funkce f definujeme předpisem

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx, \quad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

9. Fourierova transformace

Definice

Schwartzův prostor \mathcal{S} je množina všech funkcí $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, které splňují

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} (1 + \|x\|^2)^N |(D^\alpha f)(x)| < \infty$$

pro každé $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$, $N \in \mathbf{N}_0$.

9. Fourierova transformace

Věta 9.1

Nechť $\varphi \in \mathcal{S}$ a $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$. Potom

$$(i) \quad \widehat{\varphi} \in C^\infty(\mathbf{R}^n) \text{ a } D^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha \varphi}(\xi),$$

9. Fourierova transformace

Věta 9.1

Nechť $\varphi \in \mathcal{S}$ a $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$. Potom

(i) $\widehat{\varphi} \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ a $D^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha \varphi}(\xi),$

(ii) $\widehat{D^\alpha \varphi}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi),$

9. Fourierova transformace

Věta 9.1

Nechť $\varphi \in \mathcal{S}$ a $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$. Potom

- (i) $\widehat{\varphi} \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ a $D^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha \varphi}(\xi)$,
- (ii) $\widehat{D^\alpha \varphi}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$,
- (iii) $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$.

9. Fourierova transformace

Věta 9.1

Nechť $\varphi \in \mathcal{S}$ a $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$. Potom

- (i) $\widehat{\varphi} \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ a $D^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha \varphi}(\xi)$,
- (ii) $\widehat{D^\alpha \varphi}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$,
- (iii) $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$.

Věta 9.2

Fourierova transformace je spojitý lineární operátor z $L^1(\mathbf{R}^n)$ do $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}^n)$.

9. Fourierova transformace

Věta 9.3

Nechť $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Potom platí

$$(i) \widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2} \widehat{f} \cdot \widehat{g},$$

9. Fourierova transformace

Věta 9.3

Nechť $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Potom platí

$$(i) \widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2} \widehat{f} \cdot \widehat{g},$$

$$(ii) \int \widehat{f} g = \int f \widehat{g}.$$

9. Fourierova transformace

Věta 9.3

Nechť $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Potom platí

$$(i) \widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2} \widehat{f} \cdot \widehat{g},$$

$$(ii) \int \widehat{f} g = \int f \widehat{g}.$$

Lemma 9.4

Nechť $\psi(x) = e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}$, $x \in \mathbf{R}^n$. Potom $\psi \in \mathcal{S}$ a $\widehat{\psi} = \psi$.

9. Fourierova transformace

Věta 9.5 (o inverzi)

(i) *Fourierova transformace je bijekce S na S a platí*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \widehat{\varphi}(\xi) e^{i\langle \mathbf{x}, \xi \rangle} d\xi$$

pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

9. Fourierova transformace

Věta 9.5 (o inverzi)

(i) *Fourierova transformace je bijekce \mathcal{S} na \mathcal{S} a platí*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \widehat{\varphi}(\xi) e^{i\langle \mathbf{x}, \xi \rangle} d\xi$$

pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

(ii) *Pro $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ platí $\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2} = \langle \widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \rangle_{L^2}$.*

9. Fourierova transformace

Věta 9.5 (o inverzi)

(i) *Fourierova transformace je bijekce \mathcal{S} na \mathcal{S} a platí*

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \widehat{\varphi}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi$$

pro každé $x \in \mathbf{R}^n$.

(ii) *Pro $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ platí $\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2} = \langle \widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \rangle_{L^2}$.*

(iii) *Jestliže $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbf{R}^n)$, potom*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \widehat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi$$

pro s.v. $x \in \mathbf{R}^n$.

9. Fourierova transformace

Věta 9.6 (Plancherelova věta)

Existuje právě jedna izometrie $F: L^2(\mathbf{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^n)$ taková, že $Ff = \widehat{f}$ pro $f \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^2(\mathbf{R}^n)$.

10. Temperované distribuce

Označení

Pro $\varphi \in \mathcal{S}$ a $N \in \mathbf{N}_0$ označme

$$p_N(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq N} \|(1 + \|x\|^2)^N (D^\alpha \varphi)(x)\|_\infty.$$

10. Temperované distribuce

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_k\}$ prvků z \mathcal{S} **konverguje k** $\varphi \in \mathcal{S}$ v \mathcal{S} , jestliže pro každé $N \in \mathbf{N}_0$ platí $\lim_k \rho_N(\varphi_k - \varphi) = 0$.

10. Temperované distribuce

Věta 10.1

- (i) *Jestliže $\{\varphi_k\}$ konverguje k φ v $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, potom $\{\varphi_k\}$ konverguje k φ v \mathcal{S} .*

10. Temperované distribuce

Věta 10.1

- (i) *Jestliže $\{\varphi_k\}$ konverguje k φ v $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, potom $\{\varphi_k\}$ konverguje k φ v \mathcal{S} .*
- (ii) *Pro každé $\psi \in \mathcal{S}$, $\varepsilon > 0$, a $N \in \mathbf{N}_0$ existuje $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ takové, že $p_N(\psi - \varphi) < \varepsilon$.*

10. Temperované distribuce

Definice

Temperovanou distribucí rozumíme lineární zobrazení

$\Lambda: \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{C}$ takové, že $\Lambda\varphi_k \rightarrow \Lambda\varphi$, kdykoliv $\varphi_k \rightarrow \varphi$ v \mathcal{S} .

Množinu všech temperovaných distribucí značíme $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$.

10. Temperované distribuce

Definice

Temperovanou distribucí rozumíme lineární zobrazení $\Lambda: \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{C}$ takové, že $\Lambda\varphi_k \rightarrow \Lambda\varphi$, kdykoliv $\varphi_k \rightarrow \varphi$ v \mathcal{S} .
Množinu všech temperovaných distribucí značíme $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$.

Definice

Fourierovou transformací temperované distribuce Λ rozumíme distribuci $\widehat{\Lambda}$ definovanou předpisem $\widehat{\Lambda}\varphi = \Lambda\widehat{\varphi}$.

10. Temperované distribuce

Věta 10.2

Fourierova transformace je spojitá bijekce \mathcal{S}' na \mathcal{S}' s periodou 4 a spojitou inverzí.

10. Temperované distribuce

Věta 10.2

Fourierova transformace je spojitá bijekce S' na S' s periodou 4 a spojitou inverzí.

Věta 10.3

Necht' $\Lambda \in S'$ a $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$. Potom platí

$$\blacksquare D^\alpha \widehat{\Lambda} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha \Lambda},$$

10. Temperované distribuce

Věta 10.2

Fourierova transformace je spojitá bijekce S' na S' s periodou 4 a spojitou inverzí.

Věta 10.3

Nechť $\Lambda \in S'$ a $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$. Potom platí

$$\blacksquare D^\alpha \widehat{\Lambda} = (-i)^{|\alpha|} x^\alpha \widehat{\Lambda},$$

$$\blacksquare \widehat{D^\alpha \Lambda} = i^{|\alpha|} x^\alpha \widehat{\Lambda}.$$