FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA 1
LS 2010-11

1. SPEKTRÁLNÍ POLOMĚR

Definice. Nechť X je komplexní Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. **Spektrální poloměr** operátoru T je definován předpisem
$$r(T) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Věta 1.1 (Beurling)**.** *Nechť X je komplexní Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Potom $r(T) = \lim_n \|T^n\|^{1/n}$.*

2. OPERÁTORY NA HILBERTOVÝCH PROSTORECH

V tomto oddíle symbol H vždy značí komplexní Hilbertův prostor.

Definice. Řekneme, že $T \in \mathcal{L}(H)$ je

- **normální**, pokud $T^*T = TT^*$,
- **samoadjungovaný** (nebo také **hermiteovský**), pokud $T^* = T$,
- **unitární**, pokud $T^*T = I = TT^*$,
- **ortogonální projekce**, pokud T je projekce (tj. $T = T^2$) a $\operatorname{Rng} T \perp \operatorname{Ker} T$.

Lemma 2.1. *Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$. Potom*

(i) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$,
(ii) $\operatorname{Ker} T^* = \operatorname{Rng} T^{\perp}$.

Lemma 2.2. *Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak je ekvivalentní*

(i) $T = 0$,
(ii) $(Tx, x) = 0$ *pro každé* $x \in H$.

Důsledek 2.3. *Nechť $S, T \in \mathcal{L}(X)$ pro každé $x \in H$ splňují $(Sx, x) = (Tx, x)$. Potom $T = S$.*

Věta 2.4 (charakterizace normálních operátorů)**.** *Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální právě tehdy, když $\|Tx\| = \|T^*x\|$ pro každé $x \in H$.*

Věta 2.5 (vlastnosti normálních operátorů)**.** *Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Potom*

(1) $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*$,
(2) *T je invertovatelný, právě když je* ***zdola omezený****, tj. existuje $c > 0$ takové, že $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pro každé $x \in H$ (Weyl),*
(3) *pokud pro $x \in H$ platí $Tx = \lambda x$, potom $T^*x = \overline{\lambda}x$,*
(4) *pokud $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ jsou různá vlastní čísla T, pak* $\operatorname{Ker}(\lambda_1 I - T) \perp \operatorname{Ker}(\lambda_2 I - T)$,
(5) $\|T^2\| = \|T\|^2$,
(6) $\|T\| = r(T)$.

Věta 2.6 (charakterizace samoadjungovaných operátorů)**.** *Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$. Potom $T = T^*$, právě když (Tx, x) je reálné číslo pro každé $x \in H$.*

Věta 2.7. *Nechť $S, T \in \mathcal{L}(H)$ a S je samoadjungovaný. Pak $\operatorname{Rng} S \perp \operatorname{Rng} T$, právě když $ST = 0$.*

Věta 2.8. *Pro každé $T \in \mathcal{L}(H)$ existuje právě jeden rozklad $T = S_1 + iS_2$, kde S_1, S_2 jsou samoadjungované operátory.*

Definice. Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$. **Numerický range** operátoru T je definován předpisem

$$N(T) = \{(Tx, x);\ x \in S_H\}.$$

Věta 2.9 (Hilbert–Toeplitz)**.** *Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$. Potom $\sigma(T) \subset \overline{N(T)}$.*

Věta 2.10 (spektrum samodajungovaného operátoru)**.** *Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je samoadjungovaný. Potom $N(T) \subset \mathbf{R}$ a označíme-li $m_T = \inf N(T)$, $M_T = \sup N(T)$, pak platí*

(i) *$\sigma(T) \subset [m_T, M_T]$,*
(ii) *$\|T\|$ nebo $-\|T\|$ leží v $\sigma(T)$,*
(iii) *$m_T, M_T \in \sigma(T)$.*

Věta 2.11 (charakterizace unitárních operátorů)**.** *Nechť $U \in \mathcal{L}(H)$. Pak je ekvivalentní:*

(i) *U je unitární,*
(ii) *$\operatorname{Rng} U = H$ a $(Ux, Uy) = (x, y)$, $x, y \in H$,*
(iii) *$\operatorname{Rng} U = H$ a $\|Ux\| = \|x\|$, $x \in H$.*

Věta 2.12 (charakterizace ortogonálních projekcí)**.** *Nechť $P \in \mathcal{L}(H)$ je projekce. Pak je ekvivalentní:*

(i) *P je samoadjungovaná,*
(ii) *P je normální,*
(iii) *P je ortogonální,*
(iv) *$(Px, x) = \|Px\|^2$, $x \in H$.*

Věta 2.13 (spektrální rozklad kompaktního normálního operátoru; Hilbert–Schmidt)**.** *Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je kompaktní a normální. Pak existuje ortonormální báze H tvořená vlastními vektory T. Dále existují nenulová vlastní čísla $\{\lambda_n\}$ a ortonormální báze $\{e_n\}$ prostoru $\overline{\operatorname{Rng} T}$ takové, že*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n, \quad x \in H.$$

3. Vektorová integrace

Definice. Nechť K je kompaktní metrický prostor, X je Banachův prostor, $f : K \to X$ je spojité zobrazení a μ je Radonova míra na K. Nechť $x \in X$. Jestliže platí

$$\forall x^* \in X^* :\ x^*(x) = \int_K (x^* \circ f)(t)\, \mathrm{d}\mu(t),$$

pak říkáme, že **Pettisův integrál funkce** f je roven x. Hodnotu integrálu značíme $\int_K f\, \mathrm{d}\mu$.

Lemma 3.1. *Nechť X je Banachův prostor a $F \subset X$ je kompaktní.*

(i) *Potom je $\overline{\operatorname{co}}\, F$ kompaktní.*

(ii) *Pokud navíc* $\dim X < \infty$*, pak je* $\operatorname{co} F$ *kompaktní.*

Věta 3.2. *Nechť* K *je kompaktní metrický prostor,* X *je Banachův prostor,* $f\colon K \to X$ *je spojité zobrazení a* μ *je pravděpodobnostní Radonova míra na* K*. Potom existuje právě jedno* $x \in \overline{\operatorname{co}}\, f(K)$ *takové, že* $x = \int_K f \,\mathrm{d}\mu$*.*

Věta 3.3. *Nechť* K *je kompaktní metrický prostor,* X *je Banachův prostor,* $f\colon K \to X$ *je spojité zobrazení a* μ *je Radonova míra na* K*. Potom platí:*

(i) *integrál* $\int_K f \,\mathrm{d}\mu$ *existuje,*
(ii) *je-li* Y *Banachův a* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$*, pak* $\int_K (T \circ f) \,\mathrm{d}\mu = T\big(\int_K f \,\mathrm{d}\mu\big)$*,*
(iii) $\| \int_K f \,\mathrm{d}\mu \| \le \int_K \|f\| \,\mathrm{d}\mu$*.*

4. Analytický kalkulus

Věta (Cauchy)**.** *Nechť* $\Omega \subset \mathbf{C}$*,* $f \in \operatorname{Hol}(\Omega)$ *a* Γ *je cyklus v* Ω *splňující* $\operatorname{ind}_\Gamma \alpha = 0$ *pro* $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \Omega$*. Potom platí:*

(i) $f(\lambda) \operatorname{ind}_\Gamma \lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-\lambda} \,\mathrm{d}w$*,* $\lambda \in \Omega \setminus \langle \Gamma \rangle$*,*
(ii) $\int_\Gamma f(w) \,\mathrm{d}w = 0$*,*
(iii) *jsou-li* Γ_1*,* Γ_2 *cykly v* Ω *splňujícící* $\operatorname{ind}_{\Gamma_1} \alpha = \operatorname{ind}_{\Gamma_2} \alpha$ *pro každé* $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \Omega$*, potom* $\int_{\Gamma_1} f(w) \,\mathrm{d}w = \int_{\Gamma_2} f(w) \,\mathrm{d}w$*.*

Věta. *Nechť* $K \subset \Omega \subset \mathbf{C}$*,* K *je kompaktní a* Ω *je otevřená. Potom existuje cyklus* Γ *v* Ω *takový, že*

(i) $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega \setminus K$*,*
(ii) $\operatorname{ind}_\Gamma \alpha = \begin{cases} 1, & \alpha \in K, \\ 0, & \alpha \in \mathbf{C} \setminus \Omega. \end{cases}$

Definice. Má-li Γ vlastnosti (i)-(ii) z předchozí věty, pak řekneme, že Γ **ohraničuje** K v Ω.

Označení. Nechť $K \subset \mathbf{C}$ je kompaktní. Potom symbolem $\operatorname{Hol}(K)$ budeme značit všechny komplexní funkce, které jsou holomorfní na nějaké otevřené množině $\Omega \supset K$.

Označení. Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$. Označme

$$R_z = (zI - T)^{-1}, \qquad z \in \rho(T).$$

Lemma 4.1. *Nechť* $T, S \in \mathcal{L}(X)$*.*

(i) *Jestliže* S *komutuje s* T*, potom komutuje s* R_z *pro každé* $z \in \rho(T)$*.*
(ii) *Pro každé* $w, z \in \rho(T)$ *platí*

$$R_w - R_z = (z - w) R_z \circ R_w. \qquad \textit{(rezolventní identita)}$$

Věta 4.2 (existence analytického kalkulu)**.** *Nechť* $T \in \mathcal{L}(X)$ *a* $f \in \operatorname{Hol}(\sigma(T))$*. Položme*

$$f(T) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) R_z \,\mathrm{d}z,$$

kde Γ *je cyklus ohraničující* $\sigma(T)$ *v* $D(f)$*. Zobrazení* $\Phi\colon f \mapsto f(T)$ *z* $\operatorname{Hol}(\sigma(T))$ *do* $\mathcal{L}(X)$ *je dobře definované a nezávisí na volbě* Γ*.*

Věta 4.3 (vlastnosti analytického kalkulu). *Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ a $f \in \mathrm{Hol}(\sigma(T))$. Potom platí*

(1) $(1)(T) = I$ *a* $\mathrm{id}(T) = T$,
(2) Φ *je algebraický homomorfismus z* $\mathrm{Hol}(\sigma(T))$ *do* $\mathcal{L}(X)$,
(3) *jestliže* $f_n \in \mathrm{Hol}(D(f))$ *a* $f_n \overset{\mathrm{loc}}{\rightrightarrows} f$ *na* $D(f)$, *potom* $f_n(T) \to f(T)$ *v* $\mathcal{L}(X)$,
(4) $f(T)$ *je invertibilní, právě když* $f \neq 0$ *na* $\sigma(T)$,
(5) $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ *(věta o obrazu spektra),*
(6) $(g \circ f)(T) = g(f(T))$ *pro* $g \in \mathrm{Hol}(\sigma(f(T)))$,
(7) *pokud* $S \in \mathcal{L}(X)$ *komutuje s* T, *pak* $Sf(T) = f(T)S$,
(8) $(f(T))' = f(T')$.

K důkazu Věty 4.3(2).

$$
\begin{aligned}
f(T) \circ g(T) &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(\int_\Gamma f(z) R_z \,\mathrm{d}z \right) \circ \left(\int_\Lambda g(w) R_w \,\mathrm{d}w \right) \\
&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_\Gamma \left(f(z) R_z \circ \left(\int_\Lambda g(w) R_w \,\mathrm{d}w \right) \right) \mathrm{d}z \\
&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_\Gamma \left(\int_\Lambda f(z) g(w) R_z \circ R_w \,\mathrm{d}w \right) \mathrm{d}z \\
&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_\Gamma \left(\int_\Lambda f(z) g(w) \frac{R_z - R_w}{w - z} \,\mathrm{d}w \right) \mathrm{d}z \\
&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_\Gamma \left(f(z) R_z \int_\Lambda \frac{g(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w \right) \mathrm{d}z + \frac{1}{4\pi^2} \int_\Gamma \left(\int_\Lambda \frac{f(z) g(w)}{w - z} R_w \,\mathrm{d}w \right) \mathrm{d}z \\
&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_\Gamma \left(f(z) R_z \int_\Lambda \frac{g(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w \right) \mathrm{d}z + \frac{1}{4\pi^2} \int_\Lambda \left(\int_\Gamma \frac{f(z) g(w)}{w - z} R_w \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}w \\
&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_\Gamma \left(f(z) R_z \int_\Lambda \frac{g(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w \right) \mathrm{d}z + \frac{1}{4\pi^2} \int_\Lambda \left(g(w) R_w \int_\Gamma \frac{f(z)}{w - z} \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) g(z) R_z \,\mathrm{d}z = (fg)(T)
\end{aligned}
$$

Věta 4.4. *Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$, kde H je Hilbertův, a $f \in \mathrm{Hol}(\sigma(T))$. Potom platí:*

(i) $f(T)^* = \tilde{f}(T^*)$, *kde* $\tilde{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$,
(ii) *je-li T normální, pak $f(T)$ je normální.*

Věta 4.5 (logaritmus a odmocnina). *Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ a 0 leží v neomezené komponentě* $\mathbf{C} \setminus \sigma(T)$. *Potom*

(i) *existuje $S \in \mathcal{L}(X)$, že $\exp(S) = T$, neboli existuje logaritmus T,*
(ii) $\sqrt[n]{T}$ *existuje pro každé* $n \in \mathbf{N}$.

5. Spojitý kalkulus

Lemma 5.1. *Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$ normální a $p\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ má tvar $p(z) = \sum_{k,l=0}^{n} a_{kl} z^k \overline{z}^l$, potom operátor $p(T) := \sum_{k,l=0}^{n} a_{kl} T^k (T^*)^l$ splňuje $\|p(T)\| = \|p\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$.*

Věta 5.2. *Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak existuje spojitý kalkulus $\Psi\colon \mathcal{C}(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H)$ s následujícími vlastnostmi:*

(1) *$\Psi(p) = p(T)$ pro $p(z) = \sum a_{kl} z^k \overline{z}^l$,*
(2) *Ψ je algebraický izomorfismus do $\mathcal{L}(H)$, $\Psi(\overline{f}) = (\Psi(f))^*$ a $\|\Psi(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|f\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$,*
(3) *$\Psi(f) = f(T)$ pro $f \in \mathrm{Hol}(\sigma(T))$,*
(4) *$\sigma(\Psi(f)) = f(\sigma(T))$ pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$,*
(5) *$\Psi(f)$ je normální pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$,*
(6) *$\Psi(f)$ je samoadjungovaný, právě když f je reálná,*
(7) *$\Psi(g \circ f) = g(\Psi(f))$ pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$, $g \in \mathcal{C}(f(\sigma(T)))$, kde $g(\Psi(f))$ značí spojitý kalkulus pro $\Psi(f)$,*
(8) *jestliže S komutuje s T, potom S komutuje s $\Psi(f)$.*

6. Borelovský kalkulus

Lemma 6.1. *Nechť $B\colon H \times H \to \mathbf{C}$ je v první souřadnici lineární a ve druhé sdruženě lineární a nechť*

$$M := \sup_{x,y \in B_H} |B(x,y)| < \infty$$

Pak existuje právě jeden $T \in \mathcal{L}(H)$ takový, že $B(x,y) = (Tx,y)$ pro $x, y \in H$ a $\|T\| = M$.

Označení. Nechť P je metrický prostor, pak $\mathcal{B}^b(P)$ značí množinu všech omezených borelovských funkcí z P do $\mathbf{C}$. Množinu $\mathcal{B}^b(P)$ opatříme supremovou normou.

Lemma 6.2. *Nechť P je kompaktní metrický prostor a $\mathcal{A}$ je nejmenší systém komplexních funkcí na P, který obsahuje spojité funkce a je uzavřený vzhledem k bodovým limitám omezených posloupností. Potom $\mathcal{A} = \mathcal{B}^b(P)$.*

Věta 6.3. *Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak existuje borelovský kalkulus $\Theta\colon \mathcal{B}^b(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H)$ takový, že*

(1) *$\Theta = \Psi$ na $\mathcal{C}(\sigma(T))$,*
(2) *jestliže $f_n \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$, $f_n \to f$ a $\{f_n\}$ je omezená, potom pro každé $x, y \in H$ platí $(\Theta(f_n)x, y) \to (\Theta(f)x, y)$,*
(3) *Θ je algebraický homomorfismus, $(\Theta(f))^* = \Theta(\overline{f})$, $\|\Theta(f)\| \le \|f\|_{\mathcal{B}^b(\sigma(T))}$,*
(4) *$\Theta(f)$ je normální pro $f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$,*
(5) *pokud $f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$ je reálná, pak $\Theta(f)$ je samoadjungovaný,*
(6) *pokud S komutuje s T, potom S komutuje s $\Theta(f)$ pro $f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$.*

7. Spektrální rozklad normálního operátoru

Označení. Nechť K je metrický prostor. Systém všech borelovských podmnožin K označme $\mathrm{Borel}(K)$.

Definice. Nechť K je neprázdný kompaktní metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $E\colon \mathrm{Borel}(K) \to \mathcal{L}(H)$ je **spektrální míra**, pokud platí:

(i) pro každou $B \in \mathrm{Borel}(K)$ je $E(B)$ ortogonální projekce, $E(\emptyset) = 0$, $E(K) = I$,
(ii) $E(B_1 \cap B_2) = E(B_1)E(B_2)$ pro každé $B_1, B_2 \in \mathrm{Borel}(K)$,
(iii) $E(B_1 \cup B_2) = E(B_1) + E(B_2)$ pro každé $B_1, B_2 \in \mathrm{Borel}(K)$ disjunktní,
(iv) pro každé $x \in H$ je zobrazení $E_{x,x}\colon B \mapsto (E(B)x, x)$ míra na K, která je po zúplnění Radonova.

Věta 7.1. *Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$ normální, pak $E\colon \mathrm{Borel}(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H)$ definované jako $E(B) = \Theta(\chi_B)$ je spektrální míra a platí:*

(i) $\forall x \in H\ \forall f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T)):\ (\Theta(f)x, x) = \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}E_{x,x}$,
(ii) *pro $A \in \mathrm{Borel}(\sigma(T))$ a $T_A := T|_{\mathrm{Rng}\, E(A)}$ je $T_A \in \mathcal{L}(\mathrm{Rng}\, E(A))$ a $\sigma(T_A) \subset \overline{A}$,*
(iii) *pro každou otevřenou neprázdnou $G \subset \sigma(T)$ je $E(G) \neq 0$.*

Věta 7.2. *Nechť $E\colon \mathrm{Borel}(K) \to \mathcal{L}(H)$ je spektrální míra na neprázdném kompaktním metrickém prostoru K. Pro každou funkci $f \in \mathcal{B}^b(K)$ existuje právě jeden $T(f) \in \mathcal{L}(H)$ splňující $(T(f)x, x) = \int_K f \,\mathrm{d}E_{x,x}$ pro každé $x \in H$. Dále platí:*

(i) *zobrazení $T\colon f \mapsto T(f)$ je lineární, multiplikativní, $\|T\| = 1$ a $T\big(\overline{f}\big) = \big(T(f)\big)^*$,*
(ii) $\|T(f)x\|^2 = \int_K |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x}$, $x \in H$.

Označení. Značíme $T(f) = \int_K f \,\mathrm{d}E = \int_K f(t) \,\mathrm{d}E(t)$.

Věta 7.3. *Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Potom existuje právě jedna spektrální míra E na $\sigma(T)$ taková, že $T = \int_{\sigma(T)} t \,\mathrm{d}E(t)$.*

Věta 7.4. *Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální a $\lambda \in \sigma(T)$. Potom platí:*

(i) $\mathrm{Rng}\, E(\{\lambda\}) = \mathrm{Ker}(\lambda I - T)$,
(ii) $\lambda \in \sigma_p(T)$, *právě když* $E(\{\lambda\}) \neq 0$,
(iii) *jestliže je λ izolovaný bod $\sigma(T)$, potom $\lambda \in \sigma_p(T)$.*

8. Distribuce – základní pojmy

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $K \subset \Omega$ je kompaktní.

(i) Prostorem **testovacích funkcí** na Ω rozumíme

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega);\ \mathrm{supp}\,\varphi \text{ je kompaktní podmnožina } \Omega\}.$$

Dále označme

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega);\ \mathrm{supp}\,\varphi \subset K\}.$$

(ii) Jestliže $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}_0^n$, potom $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ a

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

(iii) Definujme dále

$$\|\varphi\|_N = \sup\{|D^\alpha \varphi(x)|;\ x \in \Omega, |\alpha| \le N\}, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Lemma 8.1. *Nechť $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Potom je integrál*

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

konečný s.v. a $f * g$ patří do $L^1(\mathbf{R}^n)$.

Definice. Nechť $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Potom funkci $f * g$ nazýváme **konvolucí** funkcí f a g.

Věta 8.2 (vlastnosti konvoluce)**.** *Nechť $f, g, h \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Potom platí.*

(i) *$f * g = g * f$ (komutativita),*
(ii) *$(f * g) * h = f * (g * h)$ (asociativita),*
(iii) *$||f * g||_1 \le ||f||_1 \cdot ||g||_1$,*
(iv) *jsou-li navíc f a g spojité s kompaktním nosičem, pak $\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$,*
(v) *pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ a $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ platí $D^\alpha(f * \varphi) = f * D^\alpha \varphi$.*

Definice.

(i) Řekneme, že posloupnost (φ_k) funkcí z $\mathcal{D}(\Omega)$ **konverguje k** $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ **v** $\mathcal{D}(\Omega)$, jestliže existuje kompakt $K \subset \Omega$ takový, že
 (a) $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ pro každé $k \in \mathbf{N}$,
 (b) $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ na K pro každé $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$.
(ii) **Distribucí na** Ω rozumíme lineární zobrazení $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{C}$ takové, že $\Lambda(\varphi_k) \to \Lambda(\varphi)$, kdykoliv $\varphi_k \to \varphi$ v $\mathcal{D}(\Omega)$. Množinu všech distribucí značíme $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Lemma 8.3. *Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní. Položme*

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \min\{\|\varphi - \psi\|_N, 1\}, \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Potom

(i) *$(\mathcal{D}_K(\Omega), d)$ je úplný metrický prostor,*
(ii) *posloupnost (φ_k) funkcí z $\mathcal{D}_K(\Omega)$ konverguje k $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ v $\mathcal{D}(\Omega)$ právě tehdy, když $d(\varphi_k, \varphi) \to 0$.*

Lemma 8.4. *Nechť $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{C}$ je lineární. Potom je ekvivalentní:*

(i) *$\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$,*
(ii) *pro každý kompakt $K \subset \Omega$ existují $N \in \mathbf{N}_0$ a $C > 0$ taková, že*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) :\ |\Lambda\varphi| \le C\|\varphi\|_N.$$

Definice. Nechť $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Jestliže existuje $N \in \mathbf{N}_0$ takové, že pro každý kompakt $K \subset \Omega$ existuje $C \in \mathbf{R}$ splňující

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega): \ |\Lambda\varphi| \le C\|\varphi\|_N,$$

potom nejmenší N s touto vlastností nazýváme **řádem distribuce** Λ. Pokud takové N neexistuje, pak řád Λ definujeme jako nekonečno.

Lemma 8.5. *Nechť $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ a $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Potom zobrazení z $\mathcal{D}(\Omega)$ do $\mathbf{C}$ definovaná předpisem*

$$\varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha\varphi) \qquad a \qquad \varphi \mapsto \Lambda(f\varphi)$$

jsou distribuce.

Definice. Distribuce z předchozího lemmatu nazýváme po řadě **derivací řádu** α **distribuce** Λ a **součinem funkce** f **a distribuce** Λ. Značíme je $D^\alpha\Lambda$ a $f\Lambda$.

Věta 8.6. *Jestliže f je absolutně spojitá funkce na intervalu (a,b), potom $(\Lambda_f)' = \Lambda_{f'}$.*

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{\Lambda_k\}$ distribucí z $\mathcal{D}'(\Omega)$ **konverguje k distribuci** $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, jestliže $\Lambda_k\varphi \to \Lambda\varphi$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Věta 8.7. *Nechť X je úplný metrický prostor, Y je metrický prostor, $f_n\colon X \to Y$, $f_n \to f$ a f_n jsou spojité. Pak existuje bod spojitosti f.*

Věta 8.8 (Banach-Steinhausova věta pro distribuce)**.** *Nechť $\Lambda_k \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $k \in \mathbf{N}$, a $\Lambda_k(\varphi) \to \Lambda(\varphi)$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Potom $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a $D^\alpha\Lambda_k \to D^\alpha\Lambda$ pro každé α.*

9. Fourierova transformace

Definice. Nechť $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$. **Fourierovu transformaci** funkce f definujeme předpisem

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x, \qquad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Definice. **Schwartzův prostor** $\mathcal{S}$ je množina všech funkcí $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, které splňují

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n} \left(1 + \|x\|^2\right)^N |(D^\alpha f)(x)| < \infty$$

pro každé $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$, $N \in \mathbf{N}_0$.

Věta 9.1. *Nechť $\varphi \in \mathcal{S}$ a $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$. Potom*

(i) $\widehat{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ *a* $D^\alpha\widehat{\varphi}(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha\varphi}(\xi)$,
(ii) $\widehat{D^\alpha\varphi}(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)$,
(iii) $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$.

Věta 9.2. *Fourierova transformace je spojitý lineární operátor z $L^1(\mathbf{R}^n)$ do $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}^n)$.*

Věta 9.3. *Nechť $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Potom platí*

(i) $\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2}\widehat{f} \cdot \widehat{g}$,
(ii) $\int \widehat{f} g = \int f\widehat{g}$.

Lemma 9.4. *Nechť* $\psi(x) = e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}$, $x \in \mathbf{R}^n$. *Potom* $\psi \in \mathcal{S}$ *a* $\widehat{\psi} = \psi$.

Věta 9.5 (o inverzi)**.**

(i) *Fourierova transformace je bijekce* $\mathcal{S}$ *na* $\mathcal{S}$ *a platí*

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \widehat{\varphi}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} \, \mathrm{d}\xi$$

pro každé $x \in \mathbf{R}^n$.

(ii) *Pro* $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ *platí* $\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2} = \langle \widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \rangle_{L^2}$.

(iii) *Jestliže* $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbf{R}^n)$, *potom*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \widehat{f}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} \, \mathrm{d}\xi$$

pro s.v. $x \in \mathbf{R}^n$.

Věta 9.6 (Plancherelova věta)**.** *Existuje právě jedna izometrie* $F\colon L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$ *taková, že* $Ff = \widehat{f}$ *pro* $f \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^2(\mathbf{R}^n)$.

10. Temperované distribuce

Označení. Pro $\varphi \in \mathcal{S}$ a $N \in \mathbf{N}_0$ označme

$$p_N(\varphi) = \sup_{|\alpha| \le N} \|(1 + \|x\|^2)^N (D^\alpha \varphi)(x)\|_\infty.$$

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_k\}$ prvků z $\mathcal{S}$ **konverguje k** $\varphi \in \mathcal{S}$ **v** $\mathcal{S}$, jestliže pro každé $N \in \mathbf{N}_0$ platí $\lim_k p_N(\varphi_k - \varphi) = 0$.

Věta 10.1.

(i) *Jestliže* $\{\varphi_k\}$ *konverguje k* φ *v* $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, *potom* $\{\varphi_k\}$ *konverguje k* φ *v* $\mathcal{S}$.

(ii) *Pro každé* $\psi \in \mathcal{S}$, $\varepsilon > 0$, *a* $N \in \mathbf{N}_0$ *existuje* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ *takové, že* $p_N(\psi - \varphi) < \varepsilon$.

Definice. Temperovanou distribucí rozumíme lineární zobrazení $\Lambda\colon \mathcal{S} \to \mathbf{C}$ takové, že $\Lambda\varphi_k \to \Lambda\varphi$, kdykoliv $\varphi_k \to \varphi$ v $\mathcal{S}$. Množinu všech temperovaných distribucí značíme $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$.

Definice. Fourierovou transformací temperované distribuce Λ rozumíme distribuci $\widehat{\Lambda}$ definovanou předpisem $\widehat{\Lambda}\varphi = \Lambda\widehat{\varphi}$.

Věta 10.2. *Fourierova transformace je spojitá bijekce* $\mathcal{S}'$ *na* $\mathcal{S}'$ *s periodou* 4 *a spojitou inverzí.*

Věta 10.3. *Nechť* $\Lambda \in \mathcal{S}'$ *a* $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$. *Potom platí*

- $D^\alpha \widehat{\Lambda} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha \Lambda}$,
- $\widehat{D^\alpha \Lambda} = i^{|\alpha|} x^\alpha \widehat{\Lambda}$.