Miroslav Zelený

Kapitoly

– Text k výběrové přednášce –

21. října 2010

Obsah

Kapitola 1

Fourierova analýza na LCA grupách

1.1 Topologické grupy

Definice. **Topologickou grupou** budeme rozumět grupu G, která je opatřena topologií, vhledem k níž jsou grupové operace násobení a inverze spojité.

1.1.1 Poznámka. Topologická grupa G je tedy vlastně čtveřice

(množina, násobení, inverze, topologie)

v dalším ale budeme říkat jen „topologická grupa G“.

1.1.2 Příklad.

- $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}^n$
- $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $\mathbf{T}^n$
- konečné grupy s diskrétní topologií
- $S_\infty = \{\pi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}; \pi \text{ je bijekce}\} \subset \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ se součinovou topologií

Definice. **Lokálně kompaktní abelovskou grupou (LCA grupa)** budeme rozumět topologickou grupu, jejíž topologie je lokálně kompaktní a Hausdorffova.

1.2 Haarova míra

Definice. Nechť G je LCA grupa. **Haarovou mírou** na G rozumíme nenulovou Radonovu míru μ na G, která je translačně invariantní, tj. $\mu(B + x) = \mu(B)$ pro každou borelovskou $B \subset G$ a $x \in G$.

1.2.1 Příklad.

- Lebesgueova míra G

- počítací míra $\mathbf{Z}^n$
- počítací míra na konečné grupě

1.2.2 Poznámka. Pokud G není komutativní, pak lze zřejmým způsobem definovat levou a pravou Haarovu míru na G.

1.2.3 Věta (existence Haarovy míry)**.** Nechť G je LCA grupa. Pak na G existuje Haarova míra, která je na borelovských množinách určena jednoznačně až na násobek.

Lemma 1.2.1. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $K \subset X$ je neprázdná kompaktní konvexní množina, $H \subset \mathcal{L}(X)$ je grupa lineárních zobrazení s normou 1 a navíc $\Lambda(K) \subset K$ pro každé $\Lambda \in H$. Potom existuje $x \in K$ takové, že $\Lambda(x) = x$ pro každé $\Lambda \in H$.*

Důkaz Lemmatu. Označme Ω množinu všech $L \subset K$ takových, že

- L je neprázdná kompaktní konvexní množina,
- $\Lambda(L) \subset L$ pro všechna $\Lambda \in H$.

Platí $K \in \Omega$. Nechť $L \in \Omega$ a L obsahuje alespoň dva prvky. Potom $d := \operatorname{diam} L > 0$. Množina L je kompaktní, a tedy existuje konečná $d/2$-síť D množiny L. Označme n počet prvků D a položme $r = (1 - \frac{1}{4n})d$. Definujme

$$\tilde{L} := L \cap \bigcap_{y \in L} \overline{B}(y, r).$$

Množina $\tilde{L}$ je zřejmě kompaktní a konvexní.

Množina $\tilde{L}$ je neprázdná. Nechť $x_1, \dots, x_n$ jsou prvky D. Položme

$$x^* = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n).$$

Vezměme libovolné $y \in L$. Nalezneme $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $||y - x_i|| < d/2$. Počítejme

$$\begin{aligned} ||x^* - y|| &= \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}(x_j - y) \right\| \le \frac{1}{n}||x_i - y|| + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{1}{n}||x_j - y|| \\ &\le \frac{1}{n} \cdot \frac{d}{2} + \frac{n-1}{n} d = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) d < r. \end{aligned}$$

Máme tedy $x^* \in \overline{B}(y, r)$ pro každé $y \in L$, a tedy $x^* \in \tilde{L}$.

Platí $\tilde{L} \subsetneq L$. Nalezněme body $y_1, y_2 \in L$ takové, že $||y_1 - y_2|| > r$. Potom $y_1 \notin \overline{B}(y_2, r)$, a tedy $y_1 \notin \tilde{L}$. Inkluze $\tilde{L} \subset L$ je zřejmá.

Pro každé $\Lambda \in H$ *platí* $\Lambda(\tilde{L}) \subset \tilde{L}$. Vezměme $x \in \tilde{L}$ a $\Lambda \in H$. Zřejmě $\Lambda(\tilde{L}) \subset L$. Zbývá ukázat, že $\Lambda(x) \in \overline{B}(y,r)$ pro každé $y \in L$. Zafixujme $y \in L$. Potom $\Lambda^{-1} \in H$, a tedy $\Lambda^{-1}y \in L$. Odtud

$$||\Lambda x - y|| = ||\Lambda x - \Lambda\Lambda^{-1}y|| \leq ||x - \Lambda^{-1}y|| \leq r.$$

Pokud uspořádáme Ω inkluzí, tak podle Zornova lemmatu existuje minimální prvek. Tento minimální prvek musí ale být podle předchozího jednobodový, čímž je Lemma dokázáno. ∎

Definice.

- Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor. Pak $\mathcal{C}_0(X)$ označuje množinu všech spojitých funkcí $f : X \to \mathbf{C}$ takových, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina

  $$\{x \in X;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

  kompaktní. Systém všech otevřených okolí bodu x označíme $o(x)$

- Nechť G je LCA grupa. Pro $f : G \to \mathbf{C}$ a $x \in G$ definujeme $f_x : G \to \mathbf{C}$ předpisem

  $$f_x(y) = f(y - x), \qquad y \in G.$$

- Nechť G je LCA grupa. Řekneme, že funkce $f : G \to \mathbf{C}$ je stejnoměrně spojitá, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $V \in o(0)$ takové, že $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, kdykoliv $x - y \in V$.

Lemma 1.2.2. *Nechť* G *je LCA grupa a* $f \in \mathcal{C}_0(G)$. *Potom* f *je stejnoměrně spojitá na* G.

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme kompakt $K \subset G$ takový, že

$$\forall x \in G \setminus K:\ |f(x)| < \varepsilon.$$

Ke každému $a \in K$ existuje $W_a \in o(0)$ takové, že

$$|f(t) - f(a)| < \varepsilon \qquad \text{pro každé } t \in a + W_a. \tag{1.1}$$

Nalezněme dále $V_a \in o(0)$ takové, že $V_a - V_a \subset W_a$. Množina K je kompaktní, a proto existuje konečná množina $A \subset G$ taková, že $K \subset \bigcup_{a \in A}(a + V_a)$. Položme $V = \bigcap_{a \in A} V_a$. Předpokládejme nyní, že $x \in K$ a $y \in G$ splňují $x - y \in V$. Pak existuje $a \in A$ takové, že $x \in a + V_a$. Pak máme $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Dále máme

$$y \in x - V \subset a + V_a - V_a \subset a + W_a, \tag{1.2}$$

a tedy $|f(y) - f(a)| < \varepsilon$. Dohromady z (1.1) a (1.2) plyne $|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$.

Uvažujme nyní $x, y \in G$ takové, že $x - y \in V$ a $x \notin K$ a $y \notin K$, potom $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < 2\varepsilon$. ∎

Lemma 1.2.3. *Nechť G je kompaktní abelovská grupa a $f \in \mathcal{C}(G)$. Potom*

$$K_f := \overline{\mathrm{conv}}\{f_s;\ s \in G\}$$

je kompaktní podmnožina $\mathcal{C}(G)$.

Důkaz. Použijeme Arzelà-Ascoliho větu.

K_f je uzavřená množina. Zřejmé.

Množina funkcí $\overline{\mathrm{conv}}\{f_s;\ s \in G\}$ je stejně spojitá. Zvolme $x \in G$ a $\varepsilon > 0$. Podle Lemmatu 1.2.2 nalezneme $V \in o(0)$ takové, že $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pro každé $x, y \in G$ splňující $x - y \in V$. Uvažujme konvexní kombinaci

$$g = \sum_{i=1}^{m} c_i f_{s_i}.$$

Potom pro libovolné $y \in x - V$ máme

$$|g(x) - g(y)| \le \sum_{i=1}^{m} c_i |f_{s_i}(x) - f_{s_i}(y)| = \sum_{i=1}^{m} c_i |f(x - s_i) - f(y - s_i)| < \varepsilon,$$

neboť $(x - s_i) - (y - s_i) = x - y \in V$.

Bodová omezenost. Zvolme $x \in G$ pevné. Potom

$$\sup\{|f_s(x)|;\ s \in G\} = \sup\{|f(y)|;\ y \in G\} < \infty,$$

neboť f je funkce spojitá na kompaktní množině. ■

Důkaz Věty 1.2.3 pro G kompaktní. Označme $L_s(f) = f_s$, kde $s \in G$. Zobrazení L_s je izometrie $\mathcal{C}(G)$ na $\mathcal{C}(G)$, takže $||L_s|| = 1$. Snadno se ověří, že množina $\{L_s;\ s \in G\}$ tvoří grupu. Množina K_f je kompaktní, neprázdná a konvexní. Zřejmě platí $L_s(K_f) = K_f$ pro každé $s \in G$. Podle Lemmatu existuje funkce $\varphi \in K_f$ taková, že $L_s(\varphi) = \varphi$ pro každé $s \in G$. Platí tedy $\varphi(-s + 0) = \varphi(-s) = \varphi(0)$ pro každé $s \in G$, a tedy φ je konstantní. K f tedy existuje $c \in \mathbf{C}$ takové, že odpovídající konstantní funkce φ může být stejnoměrně aproximována konvexní kombinací posunutí f. Předpokládejme, že $c' \in \mathbf{C}$ má stejnou vlastnost.

Claim. $c = c'$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existují konvexní kombinace posunutí f splňující

$$|c - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x - a_i)| < \varepsilon \qquad \text{a} \qquad |c' - \sum_{j=1}^{m} \beta_j f(x - b_j)| < \varepsilon$$

pro všechna $x \in G$. Pak máme

$$|\beta_j c - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_j f(-b_j - a_i)| \leq \beta_j \varepsilon, \qquad j = 1, \dots, m,$$

a tedy

$$|c - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_j f(-b_j - a_i)| \leq \varepsilon.$$

Obdobně dostaneme

$$|c' - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \beta_j \alpha_i f(-a_i - b_j)| \leq \varepsilon.$$

Potom platí $|c - c'| \leq 2\varepsilon$. ■

Označme jednoznačně určené číslo c pro funkci f jako $M(f)$. Následující vlastnosti operátoru $M : \mathcal{C}(G) \to \mathbf{C}$ jsou snadné k dokázání:

- $M(f) \geq 0$ pro každou $f \in \mathcal{C}(G)$ nezápornou,
- $M(\mathbf{1}) = 1$ (Symbol $\mathbf{1}$ značí konstantní funkci $x \mapsto 1$, $x \in G$.),
- $M(\alpha f) = \alpha M(f)$ pro $\alpha \in \mathbf{C}$, $f \in \mathcal{C}(G)$,
- $M(f_s) = M(f)$ pro každé $f \in \mathcal{C}(G)$, $s \in G$.

Aditivita M. Nechť $f, g \in \mathcal{C}(G)$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a najděme konvexní kombinace splňující

$$|M(f) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i + x)| < \varepsilon,$$
$$|M(g) - \sum_{j=1}^{m} \beta_j g(b_j + x)| < \varepsilon$$

pro každé $x \in G$. Pro každé j pak máme

$$|\beta_j M(f) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_j f(a_i + b_j + x)| \leq \beta_j \varepsilon$$

pro každé $x \in G$. Sečteme přes j a dostaneme

$$|M(f) - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_j f(a_i + b_j + x)| \leq \varepsilon$$

Obdobně platí

$$|M(g) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_j \alpha_i g(a_i + b_j + x)| \leq \varepsilon$$

pro každé $x \in G$. Pak máme

$$|M(f) + M(g) - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_j (f + g)(a_i + b_j + x)| \leq 2\varepsilon$$

pro každé $x \in G$. Odtud plyne $M(f) + M(g) = M(f + g)$.

Nyní podle Rieszovy věty o reprezentaci existuje nezáporná Radonova míra μ na G splňující

$$M(f) = \int f d\mu, \qquad f \in \mathcal{C}(G).$$

Vzhledem k tomu, že M je translačně invariantní a $\mathcal{C}(G)$ je hustá v $L^1(G, \mu)$, dostáváme translační invariantnost μ.

Jednoznačnost (pro G lokálně kompaktní). Nechť m a m' jsou Haarovy míry na G. Míra m je konečná na kompaktech, a proto existuje $g \in \mathcal{C}_c(G)$ taková, že $\int g\, dm = 1$. Definujme

$$\lambda = \int_G g(-x) dm'(x).$$

Pro libovolné $f \in \mathcal{C}_c(G)$ máme

$$\begin{aligned}
\int_G f(x) dm'(x) &= \int_G g(y) dm(y) \cdot \int_G f(x) dm'(x) \\
&= \int_G g(y) \left(\int_G f(x) dm'(x) \right) dm(y) \\
&= \int_G g(y) \left(\int_G f(x + y) dm'(x) \right) dm(y) \qquad \text{(translační invariance } m'\text{)} \\
&= \int_G \left(\int_G g(y) f(x + y) dm(y) \right) dm'(x) \qquad \text{(Fubiniova věta)} \\
&= \int_G \left(\int_G g(y - x) f(y) dm(y) \right) dm'(x) \qquad \text{(translační invariance } m\text{)} \\
&= \int_G \left(\int_G g(y - x) f(y) dm'(x) \right) dm(y) \qquad \text{(Fubiniova věta)} \\
&= \int_G \lambda f(y) dm(y). \qquad \text{(translační invariance } m'\text{)}
\end{aligned}$$

Odtud plyne rovnost $m' = \lambda m$ na borelovských množinách. ∎

Lemma 1.2.4. *Nechť $h \in L^1(G)$. Potom platí*

$$\int_G h(z)\, dz = \int_G h(-z)\, dz. \tag{1.3}$$

Důkaz. Uvažujme míru m' definovanou předpisem

$$m'(E) = m(-E) \qquad \text{pro } E \subset G \text{ borelovskou.}$$

Míra m' je Haarova, a proto $m' = \lambda m$ pro jisté $\lambda \in \mathbf{R}$. Vezměme symetrickou množinu $K \subset G$ konečné kladné míry a spočtěme

$$\lambda m(K) = m'(K) = m(-K) = m(K).$$

Máme tedy $\lambda = 1$. Vzorec (1.3) tedy platí pro integrovatelné jednoduché funkce a standardní postup nyní dává dokazované Lemma. ■

1.2.4 Věta (normalizace Haarovy míry)**.** Pokud je G kompaktní budeme na G vždy uvažovat Haarovu míru splňující $m(G) = 1$. Pokud je G diskrétní ale nikoliv konečná, pak $m(\{x\}) = 1$ pro každé $x \in G$.

1.2.5 Úmluva. Pokud nebude řečeno jinak, tak G bude značit LCA grupu a dx bude značit integraci podle (nějaké) fixované Haarovy míry m na G.

1.3 Translace v $L^p(G)$

1.3.1 Věta. Nechť $1 \leq p < \infty$ a $f \in L^p(G)$. Zobrazení $x \mapsto f_x$ je spojité na $L^p(G)$.

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $g \in \mathcal{C}_c(G)$, $g \neq 0$, takové, že $||f - g||_p < \varepsilon$. Označme $K = \operatorname{supp}(g)$. Nalezneme $V \in o(0)$ takové, že

$$|g(y) - g_x(y)| = |g(y) - g(y - x)| < \tilde{\varepsilon} := \varepsilon(m(K))^{-1/p}.$$

pro každé $y \in G$, $x \in V$. Potom

$$\int_G |g(y) - g_x(y)|^p \, dy = \int_{K \cup (K+x)} |g(y) - g_x(y)|^p \, dy \leq 2\varepsilon^p, \qquad x \in V,$$

a tedy $||g - g_x||_p \leq 2\varepsilon$. Odtud dostaneme

$$||f - f_x||_p \leq ||f - g||_p + ||g - g_x||_p + ||g_x - f_x||_p \leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon.$$

■

1.4 Konvoluce

Definice. Nechť $f, g \in L^1(G)$. Konvoluci f a g definujeme předpisem

$$f * g(x) = \int_G f(x - y) g(y) \, dy. \tag{1.4}$$

1.4.1 Věta. (vlastnosti konvoluce) Nechť $f, g \in L^1(G)$. Potom platí.

(a) $f * g$ je definována s.v. a $f * g \in L^1(G)$

(b) $f * g = g * f$

(c) $||f * g||_1 \leq ||f||_1 \cdot ||g||_1$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f a g jsou borelovské. Zobrazení

$$\psi : (x, y) \mapsto f(x - y)g(y)$$

je borelovské, neboť zobrazení

$$\Phi_1 : (x, y) \mapsto (x - y, y)$$

je spojité,

$$\Phi_2 : (u, v) \mapsto (f(u), g(v))$$

je borelovské, a konečně

$$\Phi_3 : (a, b) \mapsto ab$$

je spojité. Podle Fubiniovy věty máme

$$\int_G \int_G |f(x - y)g(y)| \, dy \ dx \leq ||f||_1 \cdot ||g||_1.$$

Funkce $\varphi(x) = \int_G |f(x - y)g(y)| \, dy$ je tedy v $L^1(G)$, a tudíž $\varphi(x) < \infty$ s.v. Máme tedy $f * g$ definovanou s.v., navíc $|f * g(x)| \leq \varphi(x)$, takže $f * g \in L^1(G)$ a $||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$, což dává (c).

(b) Použitím Lemmatu 1.2.4 dostaneme

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_G f(x - y)g(y) \, dy = \int_G f(x + y)g(-y) \, dy \\ &= \int_G f(y)g(-y + x) \, dy = g * f(x) \end{aligned}$$

pro s.v. $x \in G$. ■

1.4.2 Věta (další vlastnosti konvoluce)**.**

- Pro každé $f \in L^1(G)$, $g \in L^\infty(G)$ je funkce $f * g$ předpisem (1.4) definována s.v. a je omezená a stejnoměrně spojitá na G.
- Pro každé $f \in L^p(G)$, $g \in L^q(G)$, kde $p, q \in (1, \infty)$ jsou konjugované (tj. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), je funkce $f * g$ předpisem (1.4) definována s.v. a je prvkem $\mathcal{C}_0(G)$.
- Pro $f, g \in \mathcal{C}_c(G)$ platí $\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$, a tedy $f * g \in \mathcal{C}_c(G)$.
- Pro každé $f, g, h \in L^1(G)$ platí $(f * g) * h = f * (g * h)$.

1.5 Duální grupa a Fourierova transformace

Definice. Řekneme, že zobrazení $\gamma : G \to \mathbf{C}$ je **charakter**, jestliže platí

- $\forall x \in G : \; |\gamma(x)| = 1$,
- $\forall x, y \in G : \; \gamma(x + y) = \gamma(x) \cdot \gamma(y)$.

Množina všech spojitých charakterů tvoří komutativní grupu $\hat{G}$, přičemž grupové operace jsou definovány takto

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x) \cdot \gamma_2(x),$$
$$(-\gamma)(x) = \gamma(x)^{-1}.$$

Tato grupa se nazývá **duální grupa** ke grupě G.

1.5.1 Příklad.

- $G = \mathbf{R}$, $\hat{G} = \{x \mapsto e^{i\xi x};\ \xi \in \mathbf{R}\}$
- $G = \mathbf{T}$, $\hat{G} = \{x \mapsto e^{inx};\ n \in \mathbf{Z}\}$

1.5.2 Označení. Symbolem Γ budeme vždy značit duální grupu ke grupě G.

Definice. Pro každé $f \in L^1(G)$ definujeme $\hat{f} : \Gamma \to \mathbf{C}$ předpisem

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\, dx.$$

Funkce $\hat{f}$ se nazývá **Fourierovou transformací** f. Označme $A(\Gamma) = \{\hat{f};\ f \in L^1(G)\}$.

1.5.3 Věta.

(a) Pro každé $f \in L^1(G)$ je $\hat{f}$ omezená na Γ.

(b) Pro každé $f, g \in L^1(G)$ platí $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

(c) Množina $A(\Gamma)$ je invariantní vzhledem k posunutí a vzhledem k násobení $\gamma(x)$.

(d) Množina $A(\Gamma)$ je samoadjungovaná algebra, která odděluje body.

Důkaz. (a) Platí $|\hat{f}(\gamma)| \leq \int |f(x)|\, dx = ||f||_1$.

(b) Pro $f, g \in L^1(G)$ a $\gamma \in \Gamma$ platí

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\gamma) &= \int (f * g)(x)\overline{\gamma(x)}\, dx = \int_G \left(\int_G f(x - y)g(y)\, dy \right) \overline{\gamma(x)}\, dx \\
&= \int_G \left(\int_G f(x - y)\overline{\gamma(x - y)} g(y)\overline{\gamma(y)}\, dy \right)\, dx \\
&= \int_G \left(\int_G f(x - y)\overline{\gamma(x - y)}\, dx \right) g(y)\overline{\gamma(y)}\, dy \qquad \text{(Fubiniova věta)} \\
&= \int_G \hat{f}(\gamma) g(y)\overline{\gamma(y)}\, dy = \hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma).
\end{aligned}$$

(c) Chceme dokázat, že $\hat{f}_{\gamma_0} \in A(\Gamma)$, jestliže $f \in L^1(G)$ a $\gamma_0 \in \Gamma$. Položme

$$g(y) = \gamma_0(y) f(y), \qquad y \in G.$$

Potom $g \in L^1(G)$ a platí

$$\begin{aligned}\hat{g}(\gamma) &= \int_G f(y)\gamma_0(y)\overline{\gamma(y)}\, dy = \int_G f(y)\overline{(\gamma - \gamma_0)(y)}\, dy \\ &= \hat{f}(\gamma - \gamma_0) = \hat{f}_{\gamma_0}(\gamma).\end{aligned}$$

Zbývá ukázat, že pro $f \in L^1(G)$ a $x \in G$ je zobrazení $\gamma \mapsto \gamma(x)\hat{f}(\gamma)$ v $A(\Gamma)$. Stačí spočítat

$$\begin{aligned}\widehat{f_{-x}}(\gamma) &= \int_G f_{-x}(y)\overline{\gamma(y)}\, dy = \int_G f(y)\overline{\gamma(y - x)}\, dy \\ &= \gamma(x)\int_G f(y)\overline{\gamma(y)}\, dy = \gamma(x)\hat{f}(\gamma).\end{aligned}$$

(d) Chceme dokázat, že pokud $\hat{f} \in A(\Gamma)$, pak také $\overline{\hat{f}} \in A(\Gamma)$. Položme

$$\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}, \qquad x \in G,$$

a počítejme

$$\begin{aligned}\widehat{\tilde{f}}(\gamma) &= \int_G \tilde{f}(y)\overline{\gamma(y)}\, dy = \int_G \overline{f(-y)\gamma(y)}\, dy \\ &= \int_G \overline{f(y)\gamma(-y)}\, dy = \overline{\hat{f}}(\gamma).\end{aligned}$$

$A(\Gamma)$ *je algebra.* Plyne z (b).

$A(\Gamma)$ *odděluje body.* Zvolme $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Pak existuje $x \in G$ takové, že $\gamma_1(x) \neq \gamma_2(x)$. Zvolme $\varepsilon > 0$ takové, že $|\gamma_1(x) - \gamma_2(x)| > 2\varepsilon$. Nalezneme $V \in o(x)$ splňující

- $\overline{V}$ je kompaktní,
- $m(V) > 0$,
- $|\gamma_1(y) - \gamma_1(x)| < \varepsilon$ pro $y \in \overline{V}$,
- $|\gamma_2(y) - \gamma_2(x)| < \varepsilon$ pro $y \in \overline{V}$.

Položme $f = \frac{1}{m(V)}\chi_V$. Potom $f \in L^1(G)$ a platí

$$|\hat{f}(\gamma_1) - \overline{\gamma_1(x)}| \leq \int_V |\overline{\gamma_1(y)} - \overline{\gamma_1(x)}|\, dy \cdot \frac{1}{m(V)} < \varepsilon.$$

Podobně $|\hat{f}(\gamma_2) - \overline{\gamma_2(x)}| < \varepsilon$, a tedy $\hat{f}(\gamma_1) \neq \hat{f}(\gamma_2)$. ∎

1.6 Topologie duální grupy

Definice. Nechť G je LCA grupa a Γ je duální grupa ke G. Potom budeme na Γ uvažovat nejhrubší topologii τ takovou, že zobrazení $\gamma \mapsto \hat{f}(\gamma)$ je spojité pro každé $f \in L^1(G)$.

1.6.1 Poznámka. Množiny tvaru

$$\{\gamma \in \Gamma;\ |\hat{f_i}(\gamma) - \hat{f_i}(\gamma_0)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\},$$

kde $f_1, \dots, f_n \in L^1(G)$, $\gamma_0 \in \Gamma$, $\varepsilon > 0$ tvoří bázi topologie τ.

1.6.2 Věta.

(a) Zobrazení $[x, \gamma] \mapsto \gamma(x)$ je spojité zobrazení z $G \times \Gamma$ do $\mathbf{C}$.

(b) Nechť $K \subset G$, $C \subset \Gamma$ jsou kompakty. Potom množiny tvaru

$$\begin{aligned} N(K, r) &= \{\gamma \in \Gamma;\ \gamma(x) \in U_r \text{ pro každé } x \in K\}, \\ N(C, r) &= \{x \in G;\ \gamma(x) \in U_r \text{ pro každé } \gamma \in C\} \end{aligned}$$

jsou otevřené v Γ (resp. v G), přičemž $U_r = \{z \in \mathbf{C};\ |1 - z| < r\}$.

(c) Množiny tvaru $\gamma + N(K, r)$ tvoří bázi topologie na Γ.

Důkaz. (a) V důkazu Věty 1.5.3(c) jsme odvodili vztah

$$\hat{f}(\gamma)\gamma(x) = \widehat{f_{-x}}(\gamma), \qquad x \in G, \gamma \in \Gamma,$$

a tedy stačí dokázat, že $(x, \gamma) \mapsto \hat{f_x}(\gamma)$ je spojité. Pro každé γ existuje $f \in L^1(G)$ takové, že $\hat{f}(\gamma) \neq 0$. Zvolme $x_0 \in G$, $\gamma_0 \in \Gamma$ a $\varepsilon > 0$. Pak existují $V \in o(x_0)$ a $W \in o(\gamma_0)$ taková, že

$$\begin{aligned} ||f_x - f_{x_0}||_1 < \varepsilon \text{ pro } x \in V \qquad &(\text{Věta 1.3.1}), \\ |\widehat{f_{x_0}}(\gamma) - \widehat{f_{x_0}}(\gamma_0)| < \varepsilon \text{ pro } \gamma \in W \quad &(\text{spojitost } \widehat{f_{x_0}}). \end{aligned}$$

Dále platí

$$|\widehat{f_x}(\gamma) - \widehat{f_{x_0}}(\gamma)| \leq ||f_x - f_{x_0}||_1.$$

Dohromady máme

$$\begin{aligned} |\widehat{f_x}(\gamma) - \widehat{f_{x_0}}(\gamma_0)| &\leq |\widehat{f_x}(\gamma) - \widehat{f_{x_0}}(\gamma)| + |\widehat{f_{x_0}}(\gamma) - \widehat{f_{x_0}}(\gamma_0)| \\ &\leq ||f_x - f_{x_0}||_1 + \varepsilon < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

(b) Zvolme kompakt $K \subset G$, $r > 0$ a $\gamma_0 \in N(K, r)$. Pro každé $x_0 \in K$ existují okolí $V \in o(x_0)$ a $W \in o(\gamma_0)$ taková, že $\gamma(x) \in U_r$ pro $x \in V$, $\gamma \in W$. Vzhledem ke kompaktnosti K lze nalézt $V_1, \dots, V_n$ otevřené podmnožiny G pokrývající K a k nim odpovídající $W_1, \dots, W_n$

okolí γ_0 taková, že $\gamma(x) \in U_r$ pro $x \in V_i$, $\gamma \in W_i$, $i = 1, \dots, n$. Položme $W^* = \bigcap_{i=1}^n W_i$. Pak $W^* \in o(\gamma_0)$ a $W^* \subset N(K, r)$. Analogicky lze dokázat tvrzení pro $N(C, r)$.

(c) Nechť $V \in o(\gamma_0)$. Chceme nalézt $K \subset G$ kompakt a $r > 0$ takové, že platí $\gamma_0 + N(K, r) \subset V$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\gamma_0 = 0$. Existují nenulové funkce $f_1, \dots, f_n \in L^1(G)$ a $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\bigcap_{i=1}^n \{\gamma \in \Gamma;\ |\hat{f}_i(\gamma) - \hat{f}_i(0)| < \varepsilon\} \subset V.$$

Množina $\mathcal{C}_c(G)$ je hustá v $L^1(G)$, a proto můžeme předpokládat, že existuje kompakt K takový, že $\operatorname{supp} f_i \subset K$, $i = 1, \dots, n$. Jestliže zvolíme $0 < r < \varepsilon / \max_{i=1,\dots,n} ||f_i||_1$ a $\gamma \in N(K, r)$, pak

$$|\hat{f}_i(\gamma) - \hat{f}_i(0)| \le \int_K |\overline{\gamma(x)} - 1||f_i(x)|\,dx \le r||f_i||_1 < \varepsilon, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Platí tedy $N(K, r) \subset V$. ■

1.6.3 Věta. Γ je LCA grupa.

Lemma 1.6.1. *Nechť $\gamma : G \to \mathbb{C}$ je charakter a V je kompaktní okolí 0 takové, že*

$$\forall x \in V:\ |\gamma(x) - 1| \le \frac{1}{4}. \tag{1.5}$$

Potom je γ spojité. Navíc všechny charaktery γ splňující (1.5) jsou stejně spojité.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu vezměme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{3n} < \varepsilon$. Nalezneme $U \in o(0)$ splňující

$$\underbrace{U + \cdots + U}_{n \text{ krát}} \subset V.$$

Pro $x \in U$ potom máme $|\gamma(jx) - 1| \le \frac{1}{4}$, $j = 1, \dots, n$. Dostaneme

$$|\gamma(x) - 1| \le \frac{|\gamma^n(x) - 1|}{|\gamma^{n-1}(x) + \cdots + \gamma(x) + 1|} \le \frac{1/4}{n \cdot 3/4} = \frac{1}{3n} < \varepsilon.$$

Pokud nyní $x, y \in G$ a $x - y \in U$, tak máme

$$|\gamma(x) - \gamma(y)| = |\gamma(y)| \cdot |\gamma(x - y) - 1| < \varepsilon.$$

■

Důkaz. Γ *je Hausdorffův prostor.* $A(\Gamma)$ odděluje body, odtud máme, že pro $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, existuje $f \in L^1(G)$ takový, že $\hat{f}(\gamma_1) \neq \hat{f}(\gamma_2)$. Potom pro $0 < r < \frac{1}{2}|\hat{f}(\gamma_1) - \hat{f}(\gamma_2)|$ platí

$$\{\gamma \in \Gamma;\ |\hat{f}(\gamma) - \hat{f}(\gamma_1)| < r\} \cap \{\gamma \in \Gamma;\ |\hat{f}(\gamma) - \hat{f}(\gamma_2)| < r\} = \emptyset.$$

Γ *je lokálně kompaktní.* Zvolme V kompaktní okolí 0. Ukážeme, že množina

$$M = \{\gamma \in \Gamma;\ \forall x \in V:\ |\gamma(x) - 1| \le 1/4\}$$

tvoří kompaktní okolí 0 v Γ.

- Zřejmě M je okolí 0.
- Množina M je uzavřená v $\mathcal{C}(G)$ opatřeném topologií lokálně stejnoměrné konvergence.
- $\{\gamma(x);\ x \in M\} \subset \mathbf{T}$
- Množina M je stejně spojitá podle Lemmatu 1.6.1.

Podle Arzelà-Ascoliho věty dostáváme, že M je kompaktní v topologii lokálně stejnoměrné konvergence. Odtud plyne existence kompaktního okolí 0.

Spojitost grupových operací. Pro $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ a $N(K, r)$, kde $K \subset G$ je kompakt a $r > 0$, platí

$$(\gamma_1 + N(K, r/2)) - (\gamma_2 + N(K, r/2)) \subset \gamma_1 - \gamma_2 + N(K, r).$$

A tedy podle Věty 1.6.2(b)–(c) plyne, že $(\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \gamma_1 - \gamma_2$ je spojité zobrazení. ■

1.6.4 Příklad. 1) Nechť $G = \mathbf{R}$, $\gamma \in \Gamma$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\int_0^\delta \gamma(t)\,dt = \alpha \neq 0$. Vztah $\gamma(x + t) = \gamma(x)\gamma(t)$ dává

$$\alpha \cdot \gamma(x) = \gamma(x) \int_0^\delta \gamma(t)\,dt = \int_0^\delta \gamma(x + t)\,dt = \int_x^{x+\delta} \gamma(t)\,dt, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Funkce γ je spojitá, takže poslední výraz je diferencovatelný podle x. Odtud plyne, že γ je spojitě diferencovatelné. Derivujme vztah $\gamma(x+t) = \gamma(x)\gamma(t)$ podle t. Dostaneme $\gamma'(x+t) = \gamma(x)\gamma'(t)$, pro $t = 0$ pak máme $\gamma'(x) = \gamma(x)\gamma'(0)$. Funkce γ tedy splňuje diferenciální rovnici

$$\gamma'(x) = A\gamma(x), \qquad A = \gamma'(0).$$

Protože $\gamma(0) = 1$ a γ je omezené dostaneme $\gamma(x) = e^{ixy}$ pro $y \in \mathbf{R}$. Korespondence mezi γ a y je pak izomorfismus mezi Γ a $\mathbf{R}$.

Pro $r \in (0, 1)$ a $n \in \mathbf{N}$ označme $V(n, r)$ množinu těch y, pro která platí $|1 - e^{ixy}| < r$, jestliže $|x| \leq n$. Platí, že $y \in V(r, n)$, právě když $|y| < (2/n) \arcsin \frac{r}{2}$. Odtud pak plyne, že uvažovaná korespondence je homeomorfismus.

2) $G = \mathbf{T}$, $\gamma(x) = e^{inx}$, $\Gamma = \mathbf{Z}$

3) $G = \mathbf{Z}$, $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(1) = e^{i\alpha}$, $\gamma(n) = e^{in\alpha}$, $\Gamma = \mathbf{T}$

1.7 Fourier-Stieltjesova transformace

1.7.1 Označení. Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor. Množinu všech regulárních komplexních měr na X budeme značit $M(X)$.

Definice. Pro $\mu \in M(G)$ definujeme $\hat{\mu} : \Gamma \to \mathbf{C}$ takto

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G \overline{\gamma(x)} d\mu(x),$$

$\hat{\mu}$ nazýváme **Fourier-Stieltjesovou transformací** μ. Množinu všech takových $\hat{\mu}$ označíme $B(\Gamma)$.

1.7.2 Věta.

(a) Zobrazení $\hat{\mu} \in B(\Gamma)$ je omezené a stejnoměrně spojité.

(b) Množina $B(\Gamma)$ je invariantní vzhledem k posunutí, násobení $\gamma(x)$ pro libovolné $x \in G$ a vzhledem ke komplexnímu sdružování.

Důkaz. (a) Přímo z definice plyne $|\hat{\mu}(\gamma)| \leq ||\mu||$ pro každé $\gamma \in \Gamma$. Nechť $\delta > 0$. Z regularity $|\mu|$ plyne existence $K \subset G$ kompaktní takové, že $|\mu|(G \setminus K) < \delta$. Pro libovolná $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ máme

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}(\gamma_1) - \hat{\mu}(\gamma_2)| &\leq \int_G |1 - (\gamma_1 - \gamma_2)(x)| \, d|\mu|(x) \\ &= \int_K |1 - (\gamma_1 - \gamma_2)(x)| \, d|\mu|(x) + \int_{G \setminus K} |1 - (\gamma_1 - \gamma_2)(x)| \, d|\mu|(x). \end{aligned}$$

Pro $\gamma_1 - \gamma_2 \in N(K, \delta)$ odhadneme první integrál jako $\delta||\mu||$ a dále

$$\int_{G \setminus K} |1 - (\gamma_1 - \gamma_2)(x)| \, d|\mu|(x) < 2|\mu|(G \setminus K) < 2\delta.$$

Odtud již plyne stejnoměrná spojitost $\hat{\mu}$.

(b) Analogicky jako pro funkce. ■

1.8 Pozitivně definitní funkce

Definice. Řekneme, že funkce $\varphi : G \to \mathbf{C}$ je **pozitivně definitní**, jestliže nerovnost

$$\sum_{n,m=1}^{N} c_n \overline{c_m} \varphi(x_n - x_m) \geq 0$$

platí pro libovolná $x_1, \ldots, x_N \in G$ a $c_1, \ldots, c_N \in \mathbf{C}$.

1.8.1 Příklad. 1) Nechť $f \in L^2(G)$ a $\varphi = f * \tilde{f}$. Potom φ je spojitá na G podle Věty 1.4.2. Funkce φ je pozitivně definitní, neboť

$$\begin{aligned}\sum_{n,m=1}^{N} c_n\overline{c_m}\varphi(x_n - x_m) &= \sum_{n,m=1}^{N} c_n\overline{c_m}\int_G f(x_n - x_m - y)\overline{f(-y)}\,dy\\ &= \sum_{n,m=1}^{N} c_n\overline{c_m}\int_G f(x_n - y)\overline{f(x_m - y)}\,dy\\ &= \int_G |\sum_{n=1}^{N} c_n f(x_n - y)|^2\,dy \geq 0.\end{aligned}$$

2) Každý charakter je pozitivně definitní.

3) Nechť $\mu \in M(\Gamma)$, $\mu \geq 0$, a

$$\varphi(x) = \int_\Gamma \gamma(x)d\mu(\gamma).$$

Potom platí

$$\begin{aligned}\sum_{n,m=1}^{N} c_n\overline{c_m}\varphi(x_n - x_m) &= \sum_{n,m=1}^{N} c_n\overline{c_m}\int_G \gamma(x_n)\overline{\gamma(x_m)}\,d\mu(\gamma)\\ &= \int_G |\sum_{n=1}^{N} c_n f(x_n - y)|^2\,d\mu(\gamma) \geq 0.\end{aligned}$$

a φ je pozitivně definitní funkce. Dokažme ještě spojitost funkce φ. Zvolme $x \in G$. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $C \subset \Gamma$ kompaktní takovou, že $\mu(\Gamma \setminus C) < \varepsilon$. Pro $y \in N(C, \varepsilon)$ platí

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \int |\gamma(x) - \gamma(y)|d\mu(\gamma) = \int_C + \int_{\Gamma\setminus C} < \varepsilon||\mu|| + 2\varepsilon < \varepsilon(||\mu|| + 2).$$

1.8.2 Věta (vlastnosti pozitivně definitních funkcí)**.** Nechť $\varphi : G \to \mathbf{C}$ je pozitivně definitní. Potom platí

(a) $\forall x \in G : \varphi(-x) = \overline{\varphi(x)}$,

(b) $\forall x \in G : |\varphi(x)| \leq \varphi(0)$,

(c) $\forall x, y \in G : |\varphi(x) - \varphi(y)|^2 \leq 2\varphi(0)\operatorname{Re}(\varphi(0) - \varphi(x - y))$.

Důkaz. (a) Zvolme $N = 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = x$, $c_1 = 1$, $c_2 = c$. Pak máme

$$(1 + |c|^2)\varphi(0) + c\varphi(x) + \overline{c}\varphi(-x) \geq 0$$

Pro $c = 1$ máme
$$2\varphi(0) + \varphi(x) + \varphi(-x) \geq 0.$$
Pro $c = i$ máme
$$2\varphi(0) + i(\varphi(x) - \varphi(-x)) \geq 0.$$
Odtud $4\varphi(0) \geq 0$ a $\varphi(x) + \varphi(-x)$, $i(\varphi(x) - \varphi(-x))$ jsou reálná čísla, takže $\varphi(-x) = \overline{\varphi(x)}$.

(b) Zvolme c tak, aby $|c| = 1$ a $c\varphi(x) = -|\varphi(x)|$. Potom
$$2\varphi(0) - 2|\varphi(x)| \geq 0,$$
což dává (b).

(c) Pokud $\varphi(x) = \varphi(y)$, pak tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Položme $N = 3$, $x_1 = 0$, $x_2 = x$, $x_3 = y$, $c_1 = 1$ a
$$c_2 = \frac{\lambda|\varphi(x) - \varphi(y)|}{\varphi(x) - \varphi(y)}, \qquad c_3 = -c_2.$$
Dostaneme
$$\varphi(0)(1 + 2\lambda^2) + 2\lambda|\varphi(x) - \varphi(y)| - 2\lambda^2 Re\varphi(x - y) \geq 0.$$
Diskriminant je nezáporný a roven
$$4|\varphi(x) - \varphi(y)|^2 - 4(2\varphi(0) - 2Re\varphi(x - y))\varphi(0) \leq 0.$$
Odtud dostáváme požadované tvrzení. ■

1.8.3 Důsledek. Nechť φ je pozitivně definitní. Potom $\varphi(0) \geq 0$ a φ je omezená. Pokud je φ spojitá v 0, potom je φ stejnoměrně spojitá.

1.9 Konvoluce měr

Definice. Nechť $\mu, \lambda \in M(G)$. **Konvolucí měr** μ a λ budeme rozumět míru $\mu * \lambda$ definovanou předpisem
$$(\mu * \lambda)(E) = (\mu \times \lambda)(E_{(2)}),$$
kde $E_{(2)} = \{(x, y); x + y \in E\}$, $E \subset G$ je borelovská.

1.9.1 Věta.

(a) Jestliže $\mu, \lambda \in M(G)$, potom $\mu * \lambda \in M(G)$.

(b) Konvoluce je komutativní a asociativní.

(c) Platí $||\mu * \lambda|| \leq ||\mu|| \cdot ||\lambda||$.

Důkaz. (a) Podle věty o Jordanově rozkladu můžeme předpokládat, že míry jsou nezáporné.

Spočetná aditivita. Tvrzení zřejmě platí.

Regularita. Množina E je borelovská, $\varepsilon > 0$, regularita $\mu \times \lambda$ ukazuje, že existuje $K \subset E_{(2)}$ taková, že

$$(\mu \times \lambda)(K) > (\mu \times \lambda)(E_{(2)}) - \varepsilon.$$

Nechť C je obraz K při zobrazení $(x, y) \mapsto x + y$. Potom máme $K \subset C_{(2)}$, a tedy

$$\mu * \lambda(C) = (\mu \times \lambda)(C_{(2)}) \geq (\mu \times \lambda)(K) > \mu * \lambda(E) - \varepsilon.$$

Zbývající lze dokázat přechodem ke komplementu.

(b) Nechť $\mu_1, \ldots, \mu_n \in M(G)$ a $E \subset G$ je borelovská. Položme

$$\mu_1 * \cdots * \mu_n(E) = (\mu_1 \times \cdots \times \mu_n)(E_{(n)}),$$

kde $E_{(n)} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in G^n;\ x_1 + \cdots + x_n \in E\}$. Asociativita plyne z Fubiniovy věty.

Platí $x + y \in E$, právě když $y + x \in E$, takže $\mu * \lambda = \lambda * \mu$.

(c) Nechť $E \subset G$ je borelovská. Potom máme

$$\int_G \chi_E d(\mu * \lambda) = \int_G \int_G \chi_E(x + y) d\mu(x) d\lambda(y).$$

Pro jednoduché borelovské funkce máme

$$\int f d(\mu * \lambda) = \int_G \int_G f(x + y) d\mu(x) d\lambda(y). \tag{1.6}$$

Uvedený vztah proto platí i pro omezené borelovské funkce. Jestliže $|f(x)| \leq 1$ pro všechna $x \in G$, pak

$$|\int_G f(x + y) d\mu(x)| \leq ||\mu||$$

pro všechna $y \in G$, a tedy pravá strana (1.6) je menší nebo rovna $||\mu|| \cdot ||\lambda||$. ■

1.9.2 Věta. $A(\Gamma) \subset \mathcal{C}_0(\Gamma)$

Důkaz. Definujme $\Phi : \Gamma \to L^1(G)^* = L^\infty(G)$ takto

$$\Phi(\gamma)(f) = \hat{f}(\gamma).$$

Zobrazení Φ je spojité z Γ do $(L^\infty(G), w^*)$, navíc je prosté. Navíc porovnáním definic topologie na duální grupě a w^*-topologie na $L^\infty(G)$ dostaneme, že Φ je homeomorfismus Γ a $\Phi(\Gamma)$. Dále $||\Phi(\gamma)|| \leq 1$ pro každé $\gamma \in \Gamma$. Předpokládejme nyní, že $h \in \overline{\Phi(\Gamma)}^{w^*}$. Potom platí

- $||h|| \leq 1$,
- $h(f * g) = h(f) \cdot h(g)$ pro každé $f, g \in L^1(G)$.

Existuje $\varphi \in L^\infty(G)$ takové, že

$$h(f) = \int_G f(x)\varphi(x)\,dx$$

a $||\varphi||_\infty \leq 1$. Pro f a g z $L^1(G)$ platí

$$\begin{aligned}\int_G h(f)g(y)\varphi(y)\,dy = h(f)h(g) = h(f*g) &= \int_G (f*g)(x)\varphi(x)\,dx \\ &= \int_G \int_G f(x-y)g(y)\varphi(x)\,dy\,dx = \int h(f_y)g(y)\,dy.\end{aligned}$$

Odtud máme

$$h(f)\varphi(y) = h(f_y) \tag{1.7}$$

pro s.v. y. Odtud dostáváme, že φ můžeme vzít spojité. Z (1.7) dostaneme

$$h(f)\varphi(x+y) = h(f_{x+y}) = h((f_x)_y) = h(f_x)\varphi(y) = h(f)\varphi(x)\varphi(y).$$

Potom obdržíme $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$ pro všechna $x, y \in G$. Platí $\varphi(0) = \varphi(0)^2$, a tedy $\varphi(0) = 0$ nebo $\varphi(0) = 1$. V prvním případě máme $\varphi = 0$. Ve druhém případě máme $\varphi(-x) = \varphi(x)^{-1}$ takže $|\varphi(x)| = 1$. Máme tedy

$$\overline{\Phi(\Gamma)}^{w^*} = \Phi(\Gamma) \cup \{0\}. \tag{1.8}$$

Množina

$$\{h \in \overline{\Phi(\Gamma)}^{w^*};\ |\Phi(f)(\gamma)| \geq \varepsilon\}$$

je w^*-uzavřená podmnožina jednotkové koule $L^\infty(G)$, a je tedy podle Banach-Alaogluovy věty kompaktní. Podle (1.8) pak máme

$$\{h \in \overline{\Phi(\Gamma)}^{w^*};\ |\Phi(f)(\gamma)| \geq \varepsilon\} = \{h \in \Phi(\Gamma);\ |\Phi(f)(\gamma)| \geq \varepsilon\},$$

a tedy množina

$$\{\gamma \in \Gamma;\ |\hat{f}(\gamma)| \geq \varepsilon\}$$

je kompaktní. ■

1.9.3 Důsledek. $A(\Gamma)$ je hustá v $\mathcal{C}_0(\Gamma)$.

Důkaz. Plyne ze Stone-Weierstrassovy věty, předchozí věty a Věty 1.5.3. ■

1.10 Bochnerova věta

Lemma 1.10.1. *Nechť $g \in L^1(G)$. Potom* $\lim ||g^{*n}||_1^{1/n} = ||\hat{g}||_\infty$, *kde* $g^{*n} = \underbrace{g * \cdots * g}_{n \text{ krát}}$.

Bez důkazu.

1.10.1 Věta. Spojitá funkce φ na G je pozitivně definitní, právě když existuje nezáporná míra $\mu \in M(\Gamma)$ taková, že

$$\varphi(x) = \int_\Gamma \gamma(x)\, d\mu(\gamma).$$

Důkaz. Nechť φ je spojitá a pozitivně definitní. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\varphi(0) = 1$. Jestliže $f \in \mathcal{C}_c(G)$ a $\operatorname{supp} f = K$, pak $f(x)\overline{f(y)}\varphi(x-y)$ je stejnoměrně spojitá na $K \times K$. Nechť $\varepsilon > 0$. Množinu K můžeme rozložit na disjunktní borelovské množiny $E_1, \ldots, E_n$ takové, že výraz

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i)\overline{f(x_j)}\varphi(x_i - x_j)m(E_i)m(E_j), \tag{1.9}$$

kde $x_i \in E_i$, $i = 1, \ldots, n$, se liší od

$$\int_G \int_G f(x)\overline{f(y)}\varphi(x-y)\, dx\, dy$$

o méně než ε.

Funkce φ je pozitivně definitní, a proto je výraz (1.9) nezáporný. Proto také

$$\int_G \int_G f(x)\overline{f(y)}\varphi(x-y)\, dx\, dy \geq 0 \tag{1.10}$$

Vzhledem k hustotě $\mathcal{C}_c(G)$ v $L^1(G)$ dostáváme, že (1.10) platí pro každé $f \in L^1(G)$. Definujme funkcionál $T_\varphi : L^1(G) \to \mathbf{C}$ předpisem

$$T_\varphi(f) = \int_G f(x)\varphi(x)\, dx$$

a položme

$$[f, g] = T_\varphi(f * \tilde{g}), \qquad f, g \in L^1(G),$$

Pak máme

$$[f, g] = \int_G \int_G f(x)\overline{g(y)}\varphi(x-y)\, dx\, dy. \tag{1.11}$$

Součin $[\cdot, \cdot]$ je lineární v první složce, $[f, g] = \overline{[g, f]}$ a $[f, f] \geq 0$. Tyto vlastnosti nás opravňují použít Cauchy-Schwarzovu nerovnost. Dostáváme

$$|[f, g]|^2 \leq [f, f] \cdot [g, g].$$

Vezměme symetrické okolí 0 konečné míry a položme $g = \frac{1}{m(V)}\chi_V$. Z (1.11) plyne

$$[f, g] - T_\varphi(f) = \int_G \int_V \frac{1}{m(V)} f(x)(\varphi(x-y) - \varphi(x))\,dy\,dx \qquad \text{a}$$
$$[g, g] - 1 = \frac{1}{m(V)^2} \int_V \int_V (\varphi(x-y) - 1)\,dx\,dy.$$

Uvedené výrazy můžeme díky stejnoměrné spojitosti φ učinit libovolně malými. Dostaneme

$$|T_\varphi(f)|^2 \le [f, f] = T_\varphi(f * \tilde{f}).$$

Položme $h = f * \tilde{f}$. Pak máme

$$|T_\varphi(f)|^2 \le T_\varphi(h) \le T_\varphi(h^{*2})^{1/2} \le \cdots \le T_\varphi(h^{*2^n})^{1/2^n}.$$

Platí $\lim ||h^{*2^n}||^{2^{-n}} = ||\hat{h}||_\infty = ||\hat{f}||_\infty^2$. Platí tedy $|T_\varphi(f)| \le ||\hat{f}||_\infty$ pro $f \in L^1(G)$. Nyní můžeme uvažovat T_φ jako funkcionál na $A(\Gamma)$, platí totiž $T_\varphi(f_1) = T_\varphi(f_2)$ kdykoliv $\hat{f_1} = \hat{f_2}$. Operátor T_φ rozšíříme spojitě na $\mathcal{C}_0(\Gamma)$ při zachování normy. Rieszova věta o reprezentaci dává existenci $\mu \in M(\Gamma)$, $||\mu|| \le 1$, takové, že

$$T_\varphi(f) = \int \hat{f}(-\gamma)d\mu(\gamma) = \int \int f(x)\gamma(x)\,dx\,d\mu(\gamma)$$
$$= \int f(x) \left(\int \gamma(x)\,d\mu(\gamma) \right) dx.$$

Dostáváme tak

$$\varphi(x) = \int \gamma(x) d\mu(\gamma) \qquad \text{s.v. } x \in G.$$

Obě strany rovnosti jsou spojité v x, a tedy rovnost nastává všude v G.

Nezápornost μ. Pro $x = 0$ máme

$$1 = \varphi(0) = \int 1 d\mu(\gamma) = \mu(\Gamma) \le ||\mu|| = 1.$$

Platí tedy $\mu(\Gamma) = ||\mu||$, a proto $\mu \ge 0$. ■

1.11 Věta o inverzi I

Označme $B(G)$ množinu všech funkcí na G, které jsou reprezentovatelné ve tvaru

$$f(x) = \int \gamma(x)\,d\mu(\gamma), \qquad \mu \in M(\Gamma). \tag{1.12}$$

Bochnerova věta a Jordanova věta o rozkladu dávají, že $B(G)$ sestává z (konečných) lineárních kombinací spojitých pozitivně definitních funkcí.

Lemma 1.11.1. *Jestliže $\mu \in M(\Gamma)$ a $\int \gamma(x)\, d\mu(\gamma) = 0$ pro každé $x \in G$, potom $\mu = 0$.*

Důkaz. Pro $f \in L^1(G)$ platí

$$\int \hat{f}(\gamma)\, d\mu(\gamma) = \int \int f(x)\overline{\gamma(x)}\, dx\, d\mu(\gamma) = \int f(x) \left(\int \gamma(-x) d\mu(\gamma) \right) dx = 0.$$

Množina $A(\Gamma)$ je hustá v $\mathcal{C}_0(\Gamma)$, a proto dostáváme

$$\int \varphi(\gamma) d\mu(\gamma) = 0$$

pro každé $\varphi \in \mathcal{C}_0(\Gamma)$, a tedy $\mu = 0$. ∎

1.11.1 Věta.

(a) Jestliže $f \in L^1(G) \cap B(G)$, pak $\hat{f} \in L^1(\Gamma)$.

(b) Je-li Haarova míra na G pevně zvolena, pak Haarova míra na Γ může být normalizována tak, aby platilo

$$f(x) = \int \hat{f}(\gamma)\gamma(x)\, d\gamma, \qquad x \in G,$$

pro každé $f \in L^1(G) \cap B(G)$.

Důkaz. Označme $B^1 = L^1(G) \cap B(G)$ a míru μ příslušnou k $f \in B(G)$ podle (1.12) označíme μ_f. Jestliže $f \in B^1$ a $h \in L^1(G)$, pak máme

$$\begin{aligned}(h * f)(0) &= \int h(-x) f(x)\, dx \\ &= \int h(-x) \int \gamma(x) d\mu_f(\gamma)\, dx \\ &= \int \hat{h}(\gamma) d\mu_f(\gamma).\end{aligned}$$

Pokud $g \in B^1$ potom

$$\int_\gamma \hat{h}\hat{g} d\mu_f = ((h * g) * f)(0) = ((h * f) * g)(0) = \int_\Gamma \hat{h}\hat{f} d\mu_g.$$

$A(\Gamma)$ je hustá v $\mathcal{C}_0(\Gamma)$, a proto $\hat{g} d\mu_f = \hat{f} d\mu_g$ pro $f, g \in B^1$.

Nyní zadefinujeme pozitivní lineární funkcionál T na $\mathcal{C}_c(\Gamma)$. Nechť $\psi \in \mathcal{C}_c(\Gamma)$ a $K = \operatorname{supp} \psi$. Pro každé $\gamma_0 \in \Gamma$ existuje $u \in \mathcal{C}_c(G)$ takové, že $\hat{u}(\gamma_0) \neq 0$. Opět využíváme hustotu $\mathcal{C}_c(G)$ v $L^1(G)$. Fourierova transformace $u * \tilde{u}$ je kladná na okolí γ_0 ($= \hat{u}(\gamma_0) \cdot \hat{\tilde{u}}(\gamma_0) = \hat{u}(\gamma_0) \cdot \overline{\hat{u}}(\gamma_0) = |u(\gamma_0)|^2$) a všude je nezáporná. Množina K je kompaktní, takže můžeme nalézt funkce $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{C}_c(G)$ takové, že

$$g = u_1 * \tilde{u}_1 + \cdots + u_n * \tilde{u}_n \tag{1.13}$$

a $\hat{g} > 0$ na K. Poněvadž $g \in \mathcal{C}_c(G)$, dostáváme $g \in B^1$. Položme

$$T\psi = \int_\Gamma \frac{\psi}{\hat{g}} d\mu_g. \tag{1.14}$$

Funkcionál T je dobře definovaný, neboť zaměníme-li g funkcí $f \in B^1$, která má nenulovou Fourierovu transformaci na K, potom $T\psi$ se nezmění, protože

$$\int \frac{\psi}{\hat{f}\hat{g}} \hat{f} d\mu_g = \int \frac{\psi}{\hat{f}\hat{g}} \hat{g} d\mu_f.$$

Funkcionál T je zřejmě lineární. Funkce g v definici T je pozitivně definitní, takže $\mu_g \geq 0$, a proto $T\psi \geq 0$ pro $\psi \geq 0$. Dále existují ψ a μ_f takové, že $\int_\Gamma \psi d\mu_f \neq 0$. Pokud je g jako v (1.13), pak máme

$$T(\psi \hat{f}) = \int_\Gamma \frac{\psi \hat{f}}{\hat{g}} d\mu_g = \int_\Gamma \psi d\mu_f \neq 0. \tag{1.15}$$

Dostáváme tak $T \neq 0$.

Zvolme pevně $\psi \in \mathcal{C}_c(\Gamma)$ a $\gamma_0 \in \Gamma$. Zkonstruujeme g jako výše tak, aby $\hat{g} > 0$ na $\operatorname{supp}\psi \cup (\operatorname{supp}\psi + \gamma_0)$. Položme $f(x) = \overline{\gamma_0(x)} g(x)$. Pak máme $\hat{f}(\gamma) = \hat{g}(\gamma + \gamma_0)$ a $\mu_f(E) = \mu_g(E + \gamma_0)$. Jestliže $\psi_0(\gamma) = \psi_{\gamma_0}(\gamma) = \psi(\gamma - \gamma_0)$, pak

$$\begin{aligned} T\psi_0 &= \int_\Gamma \frac{\psi(\gamma - \gamma_0)}{\hat{g}(\gamma)} d\mu_g(\gamma) \\ &= \int_\Gamma \frac{\psi(\gamma)}{\hat{f}(\gamma)} d\mu_f(\gamma) = T\psi \end{aligned}$$

Operátor T je tedy translačně invariantní a platí tedy

$$T\psi = \int \psi(\gamma)\, d\gamma, \tag{1.16}$$

kde $d\gamma$ označuje Haarovu míru na Γ.

Jestliže $f \in B^1$ a $\psi \in \mathcal{C}_c(\Gamma)$, pak (1.15) a (1.16) dávají

$$\int \psi d\mu_f = T(\psi \hat{f}) = \int \psi \hat{f} d\gamma.$$

Odtud $d\mu_f = \hat{f}\, d\gamma$. Poněvadž $\mu_f \in M(\Gamma)$, dostáváme, že $\hat{f} \in L^1(\Gamma)$. Dále máme

$$f(x) = \int \gamma(x) d\mu_f(x) = \int \gamma(x) \hat{f}(\gamma)\, d\gamma.$$

∎

1.11.2 Úmluva. Od tohoto okamžiku budeme předpokládat, že Haarova míra na Γ je normalizovaná tak, že platí věta o inverzi.

1.12 Důsledky věty o inverzi

1.12.1 Věta.

(i) Množiny tvaru $x + N(C, r)$, kde $x \in G$, $C \subset \Gamma$ je kompaktní, $r > 0$, tvoří bázi topologie na G.

(ii) Γ separuje body G.

(iii) Funkce tvaru $\sum_{j=1}^{n} a_j \gamma_j(x)$, kde $a_j \in \mathbf{C}$, $\gamma_j \in \Gamma$, jsou husté v $\mathcal{C}(G)$, je-li G kompaktní.

Důkaz. (i) Nechť $V \in o(0)$. Zvolme kompaktní $W \in o(0)$ takové, že $W - W \subset V$. Položme

$$f = \frac{1}{m(W)^{1/2}} \chi_W \qquad \text{a} \qquad g = f * \tilde{f}.$$

Potom g je spojitá, pozitivně definitní a rovná se 0 mimo $W - W$. Pro g lze užít větu o inverzi a dostaneme

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \hat{g}(\gamma)\, d\gamma = g(0) &= \int f(-y) \tilde{f}(y)\, dy \\ &= \int f(-y) \overline{f(-y)}\, dy = \int |f(y)|^2\, dy = 1.\end{aligned}$$

Existuje tedy $C \subset \Gamma$ kompaktní taková, že

$$\int_C \hat{g}(\gamma)\, d\gamma > \frac{2}{3}.$$

Jestliže $x \in N(C, 1/3)$, potom

$$g(x) = \left(\int_C + \int_{\Gamma \setminus C} \right) \hat{g}(\gamma)\gamma(x)\, d\gamma.$$

Pro $\gamma \in C$, $|1 - \gamma(x)| < 1/3$, takže $Re\gamma(x) > 2/3$. Máme tedy

$$|\int_C \hat{g}(\gamma)\gamma(x)\, d\gamma| > \frac{2}{3} \int_C \hat{g}(\gamma)\, d\gamma > \frac{4}{9}.$$

Dále

$$|\int_{\Gamma \setminus C} \hat{g}(\gamma)\gamma(x)\, d\gamma| \leq \int_{\Gamma \setminus C} \hat{g}(\gamma)\, d\gamma < \frac{1}{3}.$$

Platí tedy $g(x) > 1/9$, takže $x \in V$. Odvodili jsme $N(C, 1/3) \subset V$.

(ii) Pokud $x_0 \neq 0$, pak existuje $V \in o_G(0)$ takové, že $x_0 \notin V$ a $\gamma(x_0) \neq 1$ pro nějaké $\gamma \in \Gamma$. Pokud máme $x_1, x_2 \in G$, $x_1 \neq x_2$, potom $\gamma(x_1 - x_2) \neq 1$ pro jisté $\gamma \in \Gamma$, neboli $\gamma(x_1) \neq \gamma(x_2)$.

(iii) Množina trigonometrických polynomů na G tvoří algebru uzavřenou na komplexní sdružování, separující body a obsahující nenulovou konstantu. Podle Stone-Weierstrassovy věty je uvedená množina hustá. ■

1.13 Plancherelova věta

1.13.1 Věta. Fourierova transformace zúžená na $(L^1 \cap L^2)(G)$ je izometrie vzhledem k L^2-normě na hustý lineární podprostor $L^2(G)$. Lze ji tedy jednoznačně rozšířit na izometrii $L^2(G)$.

Důkaz. Jestliže $f \in (L^1 \cap L^2)(G)$ a $g = f * \tilde{f}$, pak $g \in L^1(G)$, g je spojitá a pozitivně definitní, $\hat{g} = |\hat{f}|^2$ a věta o inverzi dává

$$\int |f(x)|^2\, dx = \int f(x)\tilde{f}(-x)\, dx = g(0) = \int \hat{g}(\gamma)\, d\gamma = \int |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma,$$

neboli $||f||_2 = ||\hat{f}||_2$.

Nechť Φ je množina všech $\hat{f} \in A(\Gamma)$, kde $f \in (L^1 \cap L^2)(G)$. Množina $(L^1 \cap L^2)(G)$ je translačně invariantní, a proto je Φ invariantní vzhledem k násobení $\gamma(x)$ pro pevné $x \in G$. Pokud $\psi \in L^2(\Gamma)$ a $\int \varphi\overline{\psi}\, d\gamma = 0$ pro všechna $\varphi \in \Phi$, potom

$$\int \varphi(\gamma)\overline{\psi}(\gamma)\gamma(x)\, d\gamma = 0$$

pro všechna $\varphi \in \Phi$, $x \in G$. Poněvadž $\varphi\overline{\psi} \in L^1(G)$, dostáváme podle Lemmatu 1.11.1 $\varphi\overline{\psi} = 0$ s.v. pro všechna $\varphi \in \Phi$. Množina $(L^1 \cap L^2)(G)$ je invariantní vzhledem k násobení $\gamma(x)$ pro $\gamma \in \Gamma$, a tak je Φ translačně invariantní. Pro každé γ_0 existuje $\varphi \in \Phi$, které je různé od 0 na okolí γ_0. Odtud plyne, že $\psi = 0$ s.v., takže Φ je hustá v $L^2(\Gamma)$. ∎

1.13.2 Poznámka. Pro $f, g \in L^2(G)$ platí

$$4f\overline{g} = |f+g|^2 - |f-g|^2 + i|f+ig|^2 - i|f-ig|^2.$$

Spolu s Plancherelovou větou dostáváme Parsevalovu formuli

$$\int_G f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\overline{\hat{g}(\gamma)}\, d\gamma. \tag{1.17}$$

Přičemž $\hat{f}$ značí Plancherelovu transformaci.

1.13.3 Věta. Množina $A(\Gamma)$ sestává právě z funkcí tvaru $F_1 * F_2$, kde $F_1, F_2 \in L^2(\Gamma)$.

Důkaz. Pro $f, g \in L^2(G)$ platí

$$\int_G f(x)g(x)\, dx = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\hat{g}(-\gamma)d\gamma.$$

Nahradíme-li $g(x)$ výrazem $\gamma_0(-x)g(x)$ dostaneme

$$\int_G f(x)g(x)\gamma_0(-x)\, dx = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma_0 - \gamma) = \hat{f} * \hat{g}(\gamma_0). \tag{1.18}$$

Každá $h \in L^1(G)$ je součinem $f, g \in L^2(G)$ a (1.18) ukazuje, že $\hat{h} = \hat{f} * \hat{g}$, kde $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\Gamma)$ podle Plancherelovy věty. Pro $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\Gamma)$ máme z (1.18), že $\hat{f} * \hat{g} \in A(\Gamma)$. ∎

1.13.4 Věta. Jestliže $E \subset \Gamma$ je neprázdná a otevřená, pak existuje $\hat{f} \in A(\Gamma)$, $\hat{f} \neq 0$, taková, že $\operatorname{supp} \hat{f} \subset E$.

Důkaz. Nechť $K \subset E$ je kompaktní množina splňující $m(K) > 0$. Nechť V je kompaktní okolí takové, že $K + V \subset E$. Položme $\hat{g} = \chi_K$, $\hat{h} = \chi_V$. Potom pro $\hat{f} = \hat{g} * \hat{h}$ platí $\operatorname{supp} \hat{f} \subset K + V$, $\hat{f} \in A(\Gamma)$ a

$$\int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\, d\gamma = m(K)m(V) > 0,$$

takže $\hat{f} \neq 0$. ∎

1.14 Pontrjaginova věta

Definujme zobrazení α z G do $\hat{\Gamma}$ následujícím předpisem $\alpha(x)(\gamma) = \gamma(x)$, $\gamma \in \Gamma$.

1.14.1 Věta. Zobrazení α je izomorfismus a homeomorfismus G na $\hat{\Gamma}$.

Důkaz. Zobrazení α je monomorfismus.

Pro $x, y \in G$ a $\gamma \in \Gamma$ platí

$$\begin{aligned} \alpha(x+y)(\gamma) = \gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y) &= \alpha(x)(\gamma) \cdot \alpha(y)(\gamma) \\ &= (\alpha(x) + \alpha(y))(\gamma). \end{aligned}$$

Poněvadž Γ separuje body G tak je α prosté.

Zobrazení α je homeomorfismus G a $\alpha(G)$.

Zvolme kompaktní podmnožinu $C \subset \Gamma$ a $r > 0$. Položme

$$V = \{x \in G;\ |1 - \gamma(x)| < r \text{ pro každé } \gamma \in C\}, \tag{1.19}$$

$$W = \{\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma};\ |1 - \hat{\gamma}(\gamma)| < r \text{ pro každé } \gamma \in C\}. \tag{1.20}$$

Množiny uvedeného tvaru tvoří bázi okolí 0 v G, resp. $\hat{\Gamma}$. Podle definice α máme $\alpha(V) = W \cap \alpha(G)$. Toto dokazuje spojitost α a α^{-1} v 0. Použitím translace V a W dokážeme spojitost v ostatních bodech.

Množina $\alpha(G)$ je uzavřená v $\hat{\Gamma}$. Zvolme $\hat{\gamma} \in \overline{\alpha(G)}$. Budeme chtít ukázat, že $\hat{\gamma} \in \alpha(G)$. Zvolme symetrické okolí V bodu 0 v grupě G takové, že $\overline{V}$ je kompaktní. Potom $\alpha(V)$ je otevřená podmnožina $\alpha(G)$, a existuje tedy otevřená množina $U \subset \hat{\Gamma}$ taková, že $U \cap \alpha(G) = \alpha(V)$. Položme $W = U \cup (-U)$. Potom vzhledem k symetrii $\alpha(V)$ dostaneme $W \cap \alpha(G) = \alpha(V)$ a W je symetrická otevřená množina obsahující 0.

Platí $(\hat{\gamma} + W) \cap \alpha(G) \neq \emptyset$, takže existuje $x \in G$ takové, že $\alpha(x) \in \hat{\gamma} + W$. Ze symetrie W máme $\hat{\gamma} \in \alpha(x) + W$. Množina $\alpha(x) + \alpha(\overline{V})$ je kompaktní, a tedy uzavřená v $\hat{\Gamma}$. Kdyby $\hat{\gamma} \notin \alpha(G)$, pak existuje otevřená množina $H \subset \hat{\Gamma}$ splňující $\hat{\gamma} \in H$ a $H \cap (\alpha(x) + \alpha(\overline{V})) = \emptyset$. Potom

$$\begin{aligned} H \cap (\alpha(x) + W) \cap \alpha(G) &= H \cap (\alpha(x) + (W \cap \alpha(G))) \\ &= H \cap (\alpha(x) + \alpha(V)) \\ &\subset H \cap (\alpha(x) + \alpha(\overline{V})) = \emptyset. \end{aligned}$$

To znamená, že $H \cap (\alpha(x) + W)$ je otevřená množina obsahující $\hat{\gamma}$, která neprotíná $\alpha(G)$, což je spor s předpokladem $\hat{\gamma} \in \overline{\alpha(G)}$.

Množina $\alpha(G)$ je hustá v $\hat{\Gamma}$. Pokud $\alpha(G)$ není hustá v $\tilde{\Gamma}$, pak existuje $F \in A(\hat{\Gamma})$ taková, že $F = 0$ na $\alpha(G)$ a $F \neq 0$. Pro jisté $\varphi \in L^1(\Gamma)$ máme

$$F(\hat{\gamma}) = \int \varphi(\gamma)\overline{\hat{\gamma}(\gamma)}\, d\gamma.$$

Poněvadž $F(\alpha(x)) = 0$ pro každé $x \in G$, dostáváme

$$\int \varphi(\gamma)\overline{\alpha(x)(\gamma)}\, d\gamma = \int \varphi(\gamma)\overline{\gamma(x)}\, d\gamma = 0,$$

a tedy $\varphi = 0$ podle Lemmatu 1.11.1. Pak ale $F = 0$, což je spor. ∎

1.15 Důsledky věty o dualitě

1.15.1 Věta. Nechť $\mu \in M(G)$ a $\hat{\mu}(\gamma) = 0$ pro všechna $\gamma \in \Gamma$, potom $\mu = 0$.

Důkaz. Plyne z Lemmatu 1.11.1 a Věty 1.14.1. ∎

1.15.2 Věta (věta o inverzi II)**.** Nechť $\mu \in M(G)$ a $\hat{\mu} \in L^1(\Gamma)$. Potom existuje $f \in L^1(G)$ takové, že $d\mu(x) = f(x)\, dx$ a

$$f(x) = \int_\Gamma \hat{\mu}(\gamma)\gamma(x)\, d\gamma. \tag{1.21}$$

Důkaz. Podle definice $\hat{\mu}$ platí

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int \overline{\gamma(x)}\, d\mu(x) = \int \gamma(-x)\, d\mu(x) = \int \gamma(y)\, d\tilde{\mu}(y),$$

kde míra $\tilde{\mu}$ je definována předpisem $\tilde{\mu}(E) = \mu(-E)$ ($E \subset G$ je borelovská). Podle Pontrjaginovy věty je G duální grupa k Γ, a tedy dostáváme $\hat{\mu} \in L^1(\Gamma) \cap B(\Gamma)$ a

$$\hat{\hat{\mu}}(x) = \int_\Gamma \hat{\mu}(\gamma)\overline{\gamma(x)}\, d\gamma = \int_\Gamma \hat{\mu}(\gamma)\gamma(-x)\, d\gamma$$

je v $L^1(G)$ podle Věty 1.11.1. Takže f definována vztahem (1.21) splňuje $\hat{\hat{\mu}}(x) = f(-x)$, je v $L^1(G)$ a platí

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(\gamma) &= \int_G \hat{\hat{\mu}}(x)\gamma(x)\, dx = \int_G f(-x)\gamma(x)\, dx \\ &= \int_G f(x)\gamma(-x)\, dx = \int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\, dx.\end{aligned}$$

Máme $\hat{\mu}(\gamma) = \int \overline{\gamma(x)}\, d\mu(x)$, a tedy $d\mu = f\, dx$ podle Lemmatu 1.11.1. ∎

1.16 Cvičení

Cvičení 1. Nalezněte v G symetrickou množinu K (tj. splňující $K = -K$) kladné konečné míry.

Cvičení 2. Proč operace $[\cdot, \cdot]$ ve Větě 1.10.1 není skalárním součinem?

Cvičení 3. Nechť H je lokálně kompaktní podgrupa lokálně kompaktní grupy G. Potom je H uzavřená.

Kapitola 2

Uzavřené ideály v $L^1(G)$

2.1 Lokální jednotky v $A(\Gamma)$

2.1.1 Věta. Nechť $C \subset \Gamma$ je kompaktní, $V \subset \Gamma$ je neprázdná otevřená a $\overline{V}$ je kompaktní. Pak existuje $k \in L^1(G)$ takové, že

(a) $\hat{k}(\gamma) = 1$ na C, $\hat{k}(\gamma) = 0$ mimo $C + V - V$ a $0 \leq \hat{k}(\gamma) \leq 1$ pro každé $\gamma \in \Gamma$,

(b) $||k||_1 \leq (m(C - V)/m(V))^{1/2}$.

Důkaz. Nalezněme $g, h \in L^2(G)$ takové, že $\hat{g} = \chi_V$, $\hat{h} = \chi_{C-V}$. Definujme

$$k(x) = \frac{g(x)h(x)}{m(V)}, \qquad x \in G.$$

Potom $\hat{k} = m(V)^{-1}\hat{g} * \hat{h}$. Platí také

$$\hat{k}(\gamma) = \frac{1}{m(V)} \int_V \hat{h}(\gamma - \gamma')\, d\gamma'.$$

Potom máme

- pro $\gamma \in C$ je $\hat{h}(\gamma - \gamma') = 1$ pro každé $\gamma' \in V$, a tedy $\hat{k}(\gamma) = 1$,
- pro $\gamma \notin C + V - V$ je $\hat{h}(\gamma - \gamma') = 0$ pro každé $\gamma' \in V$, a tedy $\hat{k}(\gamma) = 0$.

Plancherelova věta dává

$$||g||_2 = m(V)^{1/2} \qquad \text{a} \qquad ||h||_2 = m(C - V)^{1/2}.$$

Užitím Schwarzovy nerovnosti obdržíme

$$||k||_1 \leq m(V)^{-1}||g||_2||h||_2 \leq (m(C - V)/m(V))^{1/2}.$$

■

2.1.2 Věta. Nechť $W \subset \Gamma$ je otevřená množina obsahující kompakt C. Potom existuje $f \in L^1(G)$, že $\hat{f} = 1$ na C a $\hat{f} = 0$ mimo W.

Důkaz. Stačí zvolit okolí V bodu 0 takové, že $C + V - V \subset W$ a použít předchozí větu. ■

2.1.3 Věta. Nechť $f \in L^1(G)$, $\gamma_0 \in \Gamma$, $\hat{f}(\gamma_0) = 0$, $W \in o(\gamma_0)$, $\varepsilon > 0$. Potom existuje $k \in L^1(G)$ takové, že

(a) $||k||_1 < 2$,

(b) $\hat{k} = 1$ na okolí γ_0 a $\hat{k} = 0$ mimo W,

(c) $||f * k||_1 < \varepsilon$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\gamma_0 = 0$. Nalezneme kompaktní $E \subset G$ takovou, že

$$\int_{G \setminus E} |f| < \delta = \frac{\varepsilon}{4(1 + ||f||_1)}.$$

Najdeme C, V jako ve Větě 2.1.1 a navíc požadujeme

(i) $0 \in \operatorname{Int} C$,

(ii) $m(C - V) < 2m(V)$,

(iii) $C + V - V \subset W$,

(iv) $\forall x \in E \ \forall \gamma \in C + V - V : \ |1 - \gamma(x)| < \delta$.

Položme $k = m(V)^{-1} gh$, kde $g, h \in L^2(G)$, $\hat{g} = \chi_V$, $\hat{h} = \chi_{C-V}$. Odtud dostaneme (a), (b) jako v důkazu Věty 2.1.1. Platí $\hat{f}(0) = 0$, a tedy

$$\begin{aligned} f * k(x) &= \int_G f(y)(k(x-y) - k(x))\, dy, \\ ||f * k||_1 &\le \int |f(y)| \cdot ||k_y - k||\, dy \\ &= \int_E |f(y)| \cdot ||k_y - k||\, dy + \int_{G \setminus E} |f(y)| \cdot ||k_y - k||\, dy, \end{aligned}$$

$$\int_{G \setminus E} |f(y)| \cdot ||k_y - k||\, dy \le 4 \int_{G \setminus E} |f| \le 4\delta.$$

Dále máme

$$\int_E |f(y)| \cdot ||k_y - k||\, dy \le ||f||_1 \cdot \sup_{y \in E} ||k_y - k||_1.$$

Odhadneme $\sup_{y \in E} ||k_y - k||_1$. Platí

$$m(V)(k_y - k) = g(h_y - h) + (g_y - g)h_y.$$

Pro $y \in E$ (iv) implikuje (Plancherel)

$$\int_G |g_y(x) - g(x)|^2 \, dx = \int_V |1 - \gamma(y)|^2 \, d\gamma < \delta^2 m(V),$$

a tedy $||g_y - g||_2 < \delta\sqrt{m(V)}$. Podobně máme

$$||h_y - h||_2 < \delta\sqrt{m(C - V)}.$$

Poněvadž

$$||g||_2 = m(V)^{1/2} \qquad \text{a} \qquad ||h||_2 = m(C - V)^{1/2}.$$

dostáváme

$$m(V)||k_y - k||_1 < 2\delta(m(V)m(C - V))^{1/2} < 4\delta m(V), \qquad y \in E.$$

■

2.1.4 Věta. Nechť $f \in L^1(G)$, $\gamma_0 \in \Gamma$, $W \in o(\gamma_0)$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje $h \in L^1(G)$ taková, že $||h||_1 < \varepsilon$, $\hat{h} = 0$ mimo W a

$$\hat{f}(\gamma) - \hat{h}(\gamma) = \hat{f}(\gamma_0)$$

na jistém okolí 0.

Důkaz. Zvolme $g \in L^1(G)$ takové, že $\hat{g}(\gamma) = \hat{f}(\gamma_0)$ na okolí γ_0 (Věta 2.1.2). Větu 2.1.3 aplikujeme na $f - g$ a dostaneme $k \in L^1(G)$ takové, že

- $\hat{k} = 1$ na okolí γ_0,
- $\hat{k} = 0$ mimo W,
- $||(f - g) * k||_1 < \varepsilon$.

Položme $h = (f - g) * k$. Potom $\hat{h} = (\hat{f} - \hat{g}) \cdot \hat{k}$. Takže existuje okolí γ_0, na kterém platí $\hat{h} = \hat{f} - \hat{g} = \hat{f} - \hat{f}(\gamma_0)$. ■

2.1.5 Věta. Nechť $f \in L^1(G)$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje $v \in L^1(G)$ taková, že $\hat{v}$ má kompaktní nosič a $||f - f * v||_1 < \varepsilon$.

Důkaz. Položme

$$X = \{g \in L^2(G);\ \operatorname{supp} \hat{g} \text{ je kompaktní}\}.$$

Podle Plancherelovy věty je X hustá v $L^2(G)$. Jestliže $v = gh$, kde $g, h \in X$, pak $\hat{v} = \hat{g} * \hat{h}$, takže $\hat{v}$ má kompaktní nosič. Poněvadž X je hustá v $L^2(G)$, tak množina těch $v \in L^1(G)$, že $\hat{v}$ má kompaktní nosič, je hustá v $L^1(G)$.

Nalezněme kompaktní okolí V bodu 0 takové, že $||f - f_y||_1 < \varepsilon/2$ pro každé $y \in V$. Položme $u = \frac{1}{m(V)}\chi_V$. Potom máme

$$||f - f * u||_1 \le \int |f(x) - f * u(x)|\,dx = \int \left| \int (f(x-y) - f(x))u(y)\,dy \right| dx$$
$$\le \int \int |f(x-y) - f(x)|u(y)\,dy\,dx \le ||f - f_y||_1 \cdot 1 < \varepsilon/2.$$

Nalezneme $v \in L^1(G)$, kde $\hat{v}$ má kompaktní nosič, a $||u - v||_1 < \varepsilon/(2(||f||_1 + 1))$. Potom

$$||f - f * v||_1 \le ||f - f * u||_1 + ||f * u - f * v||_1 \le \varepsilon/2 + ||f||_1 \cdot ||u - v||_1 < \varepsilon.$$

■

2.2 Translačně invariantní podprostory a ideály $L^1(G)$

Definice. Řekneme, že podprostor $I \subset L^1(G)$ je **ideál**, jestliže

$$\forall f \in I\ \forall g \in L^1(G) : f * g \in I.$$

Maximálním ideálem rozumíme vlastní ideál I (tj. $\{0\} \neq I \neq L^1(G)$), který není obsažen v žádném větším vlastním ideálu.

Definice. Řekneme, že podprostor $X \subset L^1(G)$ je **translačně invariantní**, jestliže

$$\forall f \in X\ \forall y \in G : f_y \in X.$$

2.2.1 Věta.

(i) Každý translačně invariantní uzavřený podprostor $L^1(G)$ je ideál.

(ii) Každý uzavřený ideál v $L^1(G)$ je translačně invariantní.

Důkaz. (i) Nechť I je translačně invariantní uzavřený podprostor $L^1(G)$. Nechť L je spojitý lineární funkcionál na $L^1(G)$, který je nulový na I. Podle Věty **??** nalezneme funkci $\varphi \in L^\infty(G)$ takovou, že

$$L(f) = \int_G f(y)\varphi(-y)\,dy$$

pro každé $f \in L^1(G)$. Platí tedy

$$L(f) = \int_G f(y)\varphi(-y)\,dy = \int_G f(-y)\varphi(y)\,dy = (f * \varphi)(0)$$

pro každé $f \in L^1(G)$. Vezměme nyní libovolné $f \in I$ a $g \in L^1(G)$. Pro každé $x \in G$ platí $f_{-x} \in I$, a tedy

$$0 = L(f_{-x}) = (f_{-x} * \varphi)(0) = (f * \varphi)(x). \tag{2.1}$$

Pak můžeme s pomocí (2.1) psát

$$L(g * f) = (g * f) * \varphi(0) = g * (f * \varphi)(0) = 0.$$

Podle Hahn-Banachovy věty pak máme $g * f \in I$.

(ii) Nechť I je uzavřený ideál v $L^1(G)$. Uvažujme spojitý lineární funkcionál L na $L^1(G)$, který je nulový na I. Nechť $\varphi \in L^\infty(G)$ reprezentuje L stejným způsobem jako v předchozím případě. Vezměme $f \in I$. Potom platí $L(g * f) = 0$ pro každé $g \in L^1(G)$. Odtud plyne

$$0 = (g * f) * \varphi(0) = g * (f * \varphi)(0)$$

pro každé $g \in L^1(G)$. Funkcionál reprezentovaný na $L^1(G)$ funkcí $y \mapsto (f * \varphi)(-y)$ je tedy nulový na $L^1(G)$, a proto $(f * \varphi)(x) = 0$ s.v. Funkce $f * \varphi$ je spojitá (Věta 1.4.2), a tedy $(f_x * \varphi)(0) = (f * \varphi)(-x) = 0$ pro každé $x \in G$. Podle Hahn-Banachovy věty tedy patří f_x do I pro každé $x \in G$. ■

2.3 Wienerova věta

Definice. Nechť $I \subset L^1(G)$ je ideál. Označme

$$Z(I) = \{\gamma \in \Gamma;\ \forall f \in I:\ \hat{f}(\gamma) = 0\}.$$

Definice. Nechť I je ideál v $A(\Gamma)$ a nechť φ je funkce definovaná na Γ. Řekneme, že φ patří **lokálně v γ_0 do** I, jestliže existuje okolí $V \in o(\gamma_0)$ a $f \in L^1(G)$ takové, že $\hat{f} \in I$ a $\hat{f}(\gamma) = \varphi(\gamma)$ pro každé $\gamma \in V$. Pokud Γ není kompaktní a existuje kompakt $K \subset \Gamma$ a $f \in L^1(G)$ takové, že $\hat{f} \in I$ a $\hat{f}(\gamma) = \varphi(\gamma)$ pro každé $\gamma \in \Gamma \setminus K$, pak říkáme, že φ patří do I **lokálně v nekonečnu**.

Lemma 2.3.1. *Jestliže φ patří do ideálu I lokálně ve všech bodech (i v nekonečnu, pokud Γ není kompaktní), pak $\varphi \in I$.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že φ má kompaktní nosič C. Pak nalezneme

(i) otevřené množiny $V_1, \ldots, V_n \subset \Gamma$ a $f_1, \ldots, f_n \in L^1(G)$ takové, že $\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n \in I$ a $\varphi = \hat{f}_i$ na V_i, $C \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$,

(ii) otevřené množiny $W_1, \ldots, W_n$ takové, že $\overline{W_i} \subset V_i$, $i = 1, \ldots, n$, a $C \subset \bigcup_{i=1}^n W_i$,

(iii) funkce $k_1, \ldots, k_n \in L^1(G)$ takové, že $\hat{k}_i = 1$ na $\overline{W_i}$ a $\hat{k}_i = 0$ mimo V_i, $i = 1, \ldots, n$ (Věta 2.1.2).

Máme tedy $\varphi\hat{k}_i = \hat{f}_i\hat{k}_i \in I$, neboť I je ideál. Položme

$$\psi = \varphi(1 - (1 - \hat{k}_1) \cdots (1 - \hat{k}_n)).$$

Roznásobení a $\varphi k_i \in I$, $i = 1, \dots, n$, dávají $\psi \in I$. Pro $\gamma \in C$ máme $\psi(\gamma) = \varphi(\gamma)$. Pro $\gamma \in \Gamma \setminus C$ máme $\psi(\gamma) = 0$. Platí tedy $\varphi = \psi$, takže $\varphi \in I$.

Nyní uvažujme obecný případ. Funkce φ je lokálně v I v nekonečnu, a proto existuje kompakt $K \subset \Gamma$ a $g \in L^1(G)$ takové, že $\hat{g} \in I$, $\hat{g} = \varphi$ na $\Gamma \setminus K$. Potom $\varphi - \hat{g}$ má kompaktní nosič a patří do I lokálně v každém bodě. Máme tedy $\varphi - \hat{g} \in I$, takže $\varphi \in I$. ∎

2.3.1 Věta (Wiener)**.** Nechť $I \subset L^1(G)$ je uzavřený ideál. Jestliže $Z(I) = \emptyset$, pak $I = L^1(G)$.

Důkaz. Nechť $f \in L^1(G)$. Budeme dokazovat, že $f \in I$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme podle Věty 2.1.5 funkci $u_n \in L^1(G)$ takovou, že

- $\operatorname{supp} \hat{u}_n$ je kompaktní,
- $||f - f * u_n||_1 < \frac{1}{n}$.

Označme $f_n = f * u_n$. Vezměme $\gamma_0 \in \Gamma$.

Claim. $\hat{f}_n$ patří do $\hat{I} = \{\hat{\varphi};\ \varphi \in I\}$ lokálně v γ_0.

Důkaz Claimu. Nalezneme $g \in I$ takové, že $\hat{g}(\gamma_0) = 1$. Pomocí Věty 2.1.4 nalezneme $h \in L^1(G)$ takové, že $||h||_1 < 1/2$ a $\hat{h}(\gamma) = 1 - \hat{g}(\gamma)$ na jistém okolí V bodu γ_0. Řada $\sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_n \hat{h}^k$ konverguje v normě $A(\Gamma)$ k $\hat{j} \in A(\Gamma)$ a $\hat{j}(\gamma) = (1 - \hat{h}(\gamma))^{-1} \hat{f}_n(\gamma)$ pro všechna $\gamma \in \Gamma$. Jestliže $\gamma \in V$, pak $\hat{g}(\gamma)\hat{j}(\gamma) = \hat{f}_n(\gamma)$. Odtud dostáváme, že $\hat{g}\hat{j} \in \hat{I}$, a tedy $\hat{f}_n$ je v $\hat{I}$ lokálně v bodě γ_0. ∎

Poněvadž $\hat{f}_n$ má kompaktní nosič, patří $\hat{f}_n$ do $\hat{I}$ lokálně v nekonečnu. Potom Lemma 2.3.1 dává $\hat{f}_n \in \hat{I}$, a tedy $f_n \in I$. Ideál I je uzavřený, a proto $f \in I$. ∎

2.4 Wienerova tauberovská věta

2.4.1 Věta. Nechť $\varphi \in L^\infty(G)$, $f \in L^1(G)$, $\hat{f}(\gamma) \neq 0$ pro všechna $\gamma \in \Gamma$ a $\lim_{x\to\infty}(f * \varphi)(x) = a\hat{f}(0)$. Potom $\lim_{x\to\infty}(g * \varphi)(x) = a\hat{g}(0)$ pro každé $g \in L^1(G)$.

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $a = 0$, jinak bychom uvažovali $\varphi - a$ místo φ. Množina $I \subset L^1(G)$ všech funkcí $g \in L^1(G)$ takových, že $\lim_{x\to\infty}(g * \varphi)(x) = a\hat{g}(0)$, tvoří lineární podprostor $L^1(G)$, který je translačně invariantní.

Pokud $||g_n - g||_1 \to 0$, pak $||g_n * \varphi - g * \varphi||_\infty \to 0$. Jestliže $g_n \in I$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak

$$\begin{aligned}\limsup_{x\to\infty} |g * \varphi(x)| &\le \limsup_{x\to\infty} (|g_n * \varphi(x)| + |g_n * \varphi(x) - g * \varphi(x)|) \\ &\le ||g_n - g||_1 \cdot ||\varphi||_\infty\end{aligned}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $g \in I$. Množina I tedy tvoří uzavřený ideál. Poněvadž $f \in I$, máme $Z(I) = \emptyset$, a tedy $I = L^1(G)$. ∎

Kapitola 3

Některé výsledky používané v textu

3.0.2 Věta (Rieszova věta o reprezentaci)**.** Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor.

(i) Nechť T je omezený lineární funkcionál na $\mathcal{C}_0(X)$. Pak existuje jednoznačně určená míra $\mu \in M(X)$ taková, že

$$T(f) = \int f(x)\, d\mu(x)$$

pro každé $f \in \mathcal{C}_0(X)$.

(ii) Nechť T je nezáporný lineární funkcionál na $\mathcal{C}_0(X)$. Pak existuje jednoznačně určená nezáporná Radonova míra μ taková, že

$$T(f) = \int f(x)\, d\mu(x)$$

pro každé $f \in \mathcal{C}_0(X)$.

3.0.3 Věta (Stone-Weierstrass)**.** Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor a $A \subset \mathcal{C}_0(X)$ splňuje

- A je algebra,
- A odděluje body,
- A je samoadjungovaná,
- pro každé $x \in X$ existuje $f \in A$ taková, že $f(x) \neq 0$.

Potom je A hustá v $\mathcal{C}_0(X)$.

3.0.4 Věta (Arzelà-Ascoliho věta)**.** Nechť X je kompaktní a $\Phi \subset \mathcal{C}(X)$ splňuje

- $\sup\{|f(x)|;\ f \in \Phi\} < \infty$ pro každé $x \in X$,
- pro každé $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, a každé $x \in X$ existuje okolí V bodu x takové, že $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ pro všechna $y \in V$ a $f \in \Phi$,
- Φ je uzavřená podmnožina $\mathcal{C}(X)$.

Potom je Φ kompaktní.