15. Diferenciální rovnice

Fyzika

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$

Fyzika

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$
$$v' = g$$

Fyzika

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$
$$v' = g$$

Volný pád s odporem vzduchu:

$$mv' = mg - bv$$

Fyzika

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$
$$v' = g$$

Volný pád s odporem vzduchu:

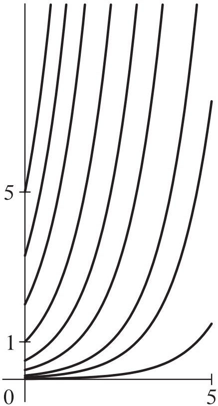
$$mv' = mg - bv$$
$$mv' = mg - bv^2$$

Demografie

Malthusův populační model $p' = ap$

Demografie

Malthusův populační model $p' = ap$

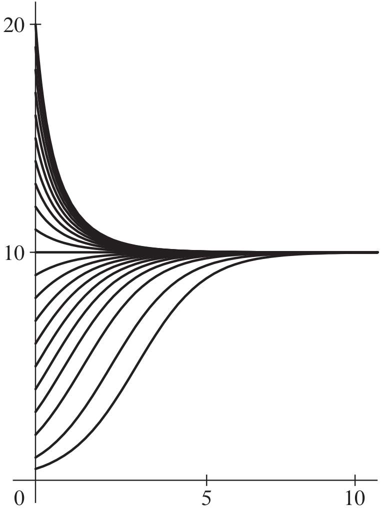


Biologie

Logistický populační model $p' = ap - bp^2$

Biologie

Logistický populační model $p' = ap - bp^2$



Biologie

Biologie

Trepka velká (paramecium caudatum)

Biologie

Trepka velká (paramecium caudatum)
prvoci – nálevnící – chudoblanní

Biologie

Trepka velká (paramecium caudatum)
prvoci – nálevnící – chudoblanní
$p' = ap - bp^2, \quad a = 2.309, b = a/375$

Ekonomie

Q_d . . . poptávka

Ekonomie

Q_d . . . poptávka
Q_s . . . nabídka

Q_d ... poptávka
Q_s ... nabídka
P ... cena

Ekonomie

Q_d ... poptávka
Q_s ... nabídka
P ... cena
$$Q_d = \alpha - \beta P + mP' + nP''$$

Ekonomie

Q_d ... poptávka
Q_s ... nabídka
P ... cena

$$Q_d = \alpha - \beta P + mP' + nP''$$
$$Q_s = -\gamma + \delta P + uP' + vP''$$

15.1 Základní pojmy

Definice

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'', y', y, x) = 0, \tag{1}$$

kde F je reálná funkce $n + 2$ proměnných.

15.1 Základní pojmy

Definice

- **Řešením diferenciální rovnice** (1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (1) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y''(x), y'(x), y(x), x) = 0.$$

15.1 Základní pojmy

Definice

- **Řešením diferenciální rovnice** (1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (1) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y''(x), y'(x), y(x), x) = 0.$$

- Řešení y diferenciální rovnice (1) je **maximální**, pokud neexistuje takové řešení z, pro které $D_y \subsetneqq D_z$ a které se na D_y shoduje s y.

15.2 Rovnice se separovanými proměnnými

Definice

Rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru

$$y' = g(y) \cdot h(x). \tag{2}$$

15.2 Rovnice se separovanými proměnnými

Metoda řešení pro spojité g a h

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h.

15.2 Rovnice se separovanými proměnnými

Metoda řešení pro spojité g a h

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h.

2. Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (2). Těmto řešením říkáme **singulární** nebo také **stacionární**.

15.2 Rovnice se separovanými proměnnými

Metoda řešení pro spojité g a h

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h.

2. Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (2). Těmto řešením říkáme **singulární** nebo také **stacionární**.

3. Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g nenulová.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku.

15.2 Rovnice se separovanými proměnnými

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J.

15.2 Rovnice se separovanými proměnnými

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

15.2 Rovnice se separovanými proměnnými

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J. Existuje konstanta $c \in \mathbf{R}$ taková, že platí

$$G(y(x)) = H(x) + c$$

na definičním oboru řešení y, který nalezneme v následujícím kroku.

5. Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ H(x) + c \in G(J)\}.$$

5. Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ H(x) + c \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů musí mít řešení tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c),$$

kde G^{-1} značí funkci inverzní k funkci G. Ta existuje, neboť G je na intervalu J buď rostoucí nebo klesající.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme" všechna maximální řešení. Nechť y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (2), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c), přičemž $b \in D_h$.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení. Nechť y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (2), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c), přičemž $b \in D_h$. Předpokládejme, že

$$\lim_{x \to b-} y_1(x) = \lim_{x \to b+} y_2(x) = \alpha \in D_g$$

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení. Nechť y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (2), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c), přičemž $b \in D_h$. Předpokládejme, že

$$\lim_{x \to b-} y_1(x) = \lim_{x \to b+} y_2(x) = \alpha \in D_g$$

Pak funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, b); \\ \alpha, & x = b; \\ y_2(x), & x \in (b, c); \end{cases}$$

je řešením rovnice (2) na intervalu (a, c).

15.3 LDR prvního řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{3}$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{3}$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$ (**lineární diferenciální rovnice prvního řádu**).

Věta 15.1

Maximální řešení rovnice (3) splňující podmínku $y(x_0) = y_0$, kde $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbf{R}$, má tvar

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} dt \right) e^{-P(x)} + y_0 e^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),$$

kde P je primitivní funkce k p na (a, b) splňující $P(x_0) = 0$.

15.4 LDR n-tého řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \qquad (4)$$

kde $a_0, \ldots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b)

15.4 LDR n-tého řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \qquad (4)$$

kde $a_0, \ldots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b) (**lineární diferenciální rovnice** n**-tého řádu s konstantními koeficienty**).

15.4 LDR n-tého řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \qquad (4)$$

kde $a_0, \ldots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b) (**lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty**).
Homogenní rovnicí k rovnici (4) rozumíme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0. \qquad (5)$$

Věta 15.2

Nechť $t_0 \in (a, b)$ *a* $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbf{R}$. *Pak existuje právě jedno maximální řešení* y *rovnice* (4)*, které splňuje podmínky*

$$y(t_0) = z_0,\ y'(t_0) = z_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu (a, b).

Věta 15.3

(i) *Maximální řešení rovnice (5) jsou definována na celém* **R** *a tvoří vektorový podprostor prostoru* $\mathcal{C}^n(\mathbf{R})$ *dimenze n.*

Věta 15.3

(i) *Maximální řešení rovnice (5) jsou definována na celém* $\mathbf{R}$ *a tvoří vektorový podprostor prostoru* $\mathcal{C}^n(\mathbf{R})$ *dimenze* n.

(ii) *Nechť* y_p *je maximální řešení rovnice (4). Pak funkce* y *je jejím maximálním řešením, právě když ji lze zapsat ve tvaru* $y = y_p + y_h$, *kde* y_h *je vhodné řešení rovnice (5).*

Definice

Charakteristickým polynomem rovnice (5) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Věta 15.4

Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *jsou všechny různé reálné kořeny charakteristického polynomu* χ *s násobnostmi* $r_1, \ldots, r_s$*. Nechť* $\alpha_1 + \beta_1 i, \ldots, \alpha_l + \beta_l i$ *jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu* χ *s kladnou imaginární částí a násobnostmi* $q_1, \ldots, q_l$*.*

Pak funkce

$$
\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & & & \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \dots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & & & \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, \\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t
\end{array}
$$

tvoří fundamentální systém řešení rovnice (5).

Označení

Množinu všech komplexních polynomů označíme $\mathcal{P}$.

15.4 LDR n-tého řádu

Označení

Množinu všech komplexních polynomů označíme $\mathcal{P}$.

Lemma 15.5

Nechť $\omega \in \mathbf{C}$ a $L : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ je definováno předpisem $L(P) = \omega P + P'$. Potom pro $k \in \mathbf{N}$ a $P \in \mathcal{P}$ platí

$$L^k(P) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \omega^{k-j} P^{(j)}.$$

Lemma 15.6

Nechť $\omega \in \mathbf{C}$ je d-násobný kořen polynomu $Q(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ a P je polynom splňující $\operatorname{st} P < d$. *Potom*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k L^k(P) = 0,$$

kde $L(P) = \omega P + P'$.

Lemma 15.7

Nechť $y_1, \dots, y_n$ tvoří fundamentální systém rovnice (5). Potom matice

$$U(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

je regulární pro každé $t \in \mathbf{R}$.

Věta 15.8

Nechť

$$f(t) = e^{\mu t} \cdot (P(t) \cos \nu t + Q(t) \sin \nu t)\,,$$

kde $\mu, \nu \in \mathbf{R}$ *a* P, Q *jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice* (4) *ve tvaru*

$$y_0(t) = t^m e^{\mu t} \cdot (R(t) \cos \nu t + S(t) \sin \nu t)\,,$$

kde R, S *jsou vhodné polynomy stupně ne většího než* $\max\{$*stupeň* P, *stupeň* $Q\}$ *a* $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *udává, jakou násobnost má číslo* $\mu + i\nu$ *jakožto kořen charakteristického polynomu.*

15.5 Soustavy diferenciálních rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{6}$$

kde f_i, $i = 1, \dots, n$, jsou dané funkce definované na jisté neprázdné otevřené podmnožině $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.

15.5 Soustavy diferenciálních rovnic

Vektorový tvar:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)),$$

kde máme $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$,
$\boldsymbol{x}'(t) = [x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)]$ a dále $\boldsymbol{f} = [f_1, f_2, \ldots, f_n]$.

15.5 Soustavy diferenciálních rovnic

Definice

- **Řešením soustavy** (6) rozumíme vektorovou funkci $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $J \subset \mathbf{R}$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in J$ existují vlastní derivace $x_i'(t)$, $i = 1, \dots, n$, a platí (6).

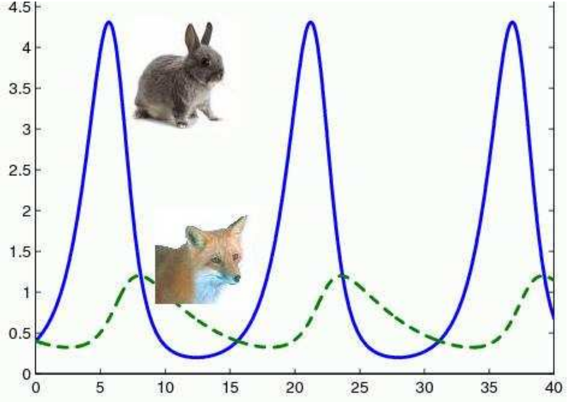
15.5 Soustavy diferenciálních rovnic

Definice

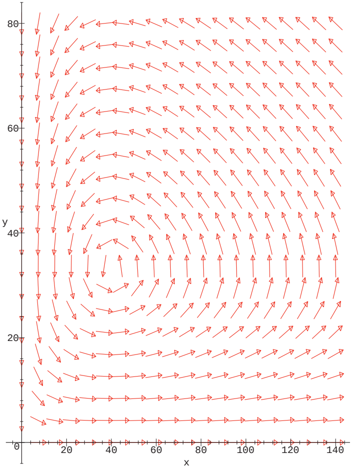
- **Řešením soustavy** (6) rozumíme vektorovou funkci $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $J \subset \mathbf{R}$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in J$ existují vlastní derivace $x_i'(t)$, $i = 1, \ldots, n$, a platí (6).
- **Počáteční úlohou** pro (6) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy (6) splňující navíc předem zadanou podmínku $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$, kde $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$ (tzv. počáteční podmínka).

- Maximální řešení soustavy (6) je takové řešení $\boldsymbol{x}$ definované na intervalu J, které již nelze prodloužit, tj. je-li $\boldsymbol{y}$ řešení definované na intervalu I, $J \subset I$ a $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t)$ pro každé $t \in J$, pak $J = I$.

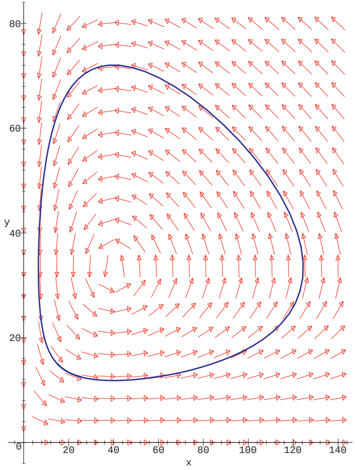
15.5 Soustavy diferenciálních rovnic



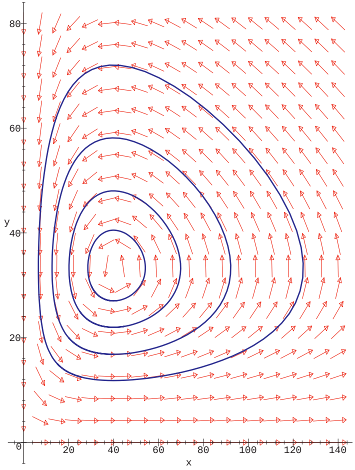
15.5 Soustavy diferenciálních rovnic



15.5 Soustavy diferenciálních rovnic



15.5 Soustavy diferenciálních rovnic



Věta 15.9 (Peanova věta o existenci)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\boldsymbol{f} : G \to \mathbf{R}^n$ je spojitá na G. Pak pro každé $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$ existuje maximální řešení rovnice (6) splňující $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$.

Věta 15.10 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $\boldsymbol{f}\colon [t, \boldsymbol{x}] \mapsto \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}^n$ *je spojité zobrazení na G a je „lokálně lipschitzovské v* $\boldsymbol{x}$*“, tj. pro každý bod* $[t, \boldsymbol{x}] \in G$ *existuje* $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$*, a* $L \in \mathbf{R}$ *takové, že pro každé dva body* $[s, \boldsymbol{x}^1]$ *,* $[s, \boldsymbol{x}^2]$ *z* $B([t, \boldsymbol{x}], \varepsilon)$ *máme*

$$||\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^1) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^2)|| \leq L||\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2||.$$

Jestliže $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$*, potom existuje právě jedno maximální řešení rovnice* (6) *splňující* $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$*.*

15.6 Soustavy lineárních dif. rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{aligned} \tag{7}$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_{ij} : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$, $b_i : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, jsou spojité funkce.

15.6 Soustavy lineárních dif. rovnic

Vektorový tvar:

$$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t),$$

kde

$$\mathbb{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Věta 15.11 (o existenci a jednoznačnosti řešení)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^{\star}$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *a* $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbf{R}^n$. *Nechť* $\mathbb{A} : (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$, $\boldsymbol{b} : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ *jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení* $\boldsymbol{x}$ *soustavy (7) splňující* $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$. *Toto řešení je definováno na celém intervalu* (α, β).

Definice

Homogenní soustavou k (7) rozumíme soustavu

$$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}(t)\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

Věta 15.12

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, *a* $\mathbb{A} : (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$ *je spojité zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení soustavy* (8) *tvoří vektorový podprostor prostoru* $\mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbf{R}^n)$. *Dimenze tohoto podprostoru je rovna n.*

Věta 15.13

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^{\star}$, $\alpha < \beta$ *a* $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbf{R}^n$. *Nechť* $\mathbb{A} : (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$, $\boldsymbol{b} : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ *jsou spojitá zobrazení. Nechť* $\boldsymbol{y}$ *je řešení* (7) *na intervalu* (α, β). *Potom každé řešení* $\boldsymbol{x}$ *soustavy* (7) *na intervalu* (α, β) *má tvar* $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, *kde* $\boldsymbol{z}$ *je jisté řešení* (8).

Definice

Nechť vektorové funkce $\boldsymbol{y}^1, \dots, \boldsymbol{y}^n$ tvoří bázi prostoru řešení rovnice (8) na (α, β). Takovou množinu řešení nazýváme **fundamentální** systém rovnice (8). Označme

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & \dots & y_1^n(t) \\ y_2^1(t) & \dots & y_2^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Matici Φ nazýváme **fundamentální maticí soustavy** (8).

Lemma 15.14

Nechť Φ *je fundamentální matice rovnice* (8). *Pak* $\Phi(t)$ *je regulární pro každé t* $\in (\alpha, \beta)$.

Lemma 15.14

Nechť Φ je fundamentální matice rovnice (8). Pak $\Phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (\alpha, \beta)$.

Věta 15.15 (variace konstant)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbf{R}^n$. Pak maximální řešení $\boldsymbol{y}$ rovnice (7) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}^0$ má tvar

$$\boldsymbol{y}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{y}^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\,ds, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

kde Φ je fundamentální matice soustavy (8).

Věta 15.16

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *a vektorová funkce* $\boldsymbol{y} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ *je řešením soustavy* $\boldsymbol{y}' = \mathbb{A}\boldsymbol{y}$. *Pak* $\boldsymbol{y}$ *je třídy* $\mathcal{C}^\infty$ *a pro každé* $k \in \mathbf{N}$ *platí* $\boldsymbol{y}^{(k)}(x) = \mathbb{A}^k \boldsymbol{y}(x)$ *pro* $x \in \mathbf{R}$.

15.7 Řešení lin. soustav s konst. koeficienty

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme λ**-maticí**.

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme λ**-maticí**. **Řádkovými úpravami** λ**-matice** rozumíme:

- záměnu dvou řádků,

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme λ**-maticí**. **Řádkovými úpravami** λ**-matice** rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme λ**-maticí**. **Řádkovými úpravami** λ**-matice** rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,
- přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ.

15.7 Řešení lin. soustav s konst. koeficienty

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme λ**-maticí**. **Řádkovými úpravami** λ**-matice** rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,
- přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ.

Lemma 15.17

Nechť $\Lambda = (P_1, \dots, P_n)^T$ je λ-matice. Potom ji lze konečnou posloupností řádkových úprav převést na λ-matici $\tilde{\Lambda} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n)^T$, kde nejvýše jeden z polynomů $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ je nenulový.

Věta 15.18

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$*. Pak lze* λ*-matici* $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ *převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou* λ*-matici. Výsledná* λ*-matice má na diagonále nenulové polynomy, součet jejichž stupňů je n.*

Označení

- Nechť $P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ je polynom a $y\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je funkce mající vlastní derivaci n-tého řádu na $\mathbf{R}$. Potom symbol $P(\frac{d}{dx})y$ značí funkci

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y.$$

15.7 Řešení lin. soustav s konst. koeficienty

Označení

- Nechť $\mathbb{P} = (P_{ij})$ je λ-matice typu $n \times n$. Soustavou diferenciálních rovnic odpovídající $\mathbb{P}$ budeme rozumět soustavu

$$\begin{aligned}
P_{11}\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n &= 0,\\
P_{21}\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{2n}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n &= 0,\\
&\vdots\\
P_{n1}\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{nn}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n &= 0.
\end{aligned}$$

Věta 15.19

Nechť λ-matice $\tilde{\mathbb{P}}$ vznikla konečnou posloupností řádkových úprav z λ-matice $\mathbb{P}$. Potom vektorová funkce $\boldsymbol{y}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ třídy $\mathcal{C}^\infty$ je řešením soustavy odpovídající matici $\mathbb{P}$, právě když je řešením soustavy odpovídající $\tilde{\mathbb{P}}$.

15.7 Řešení lin. soustav s konst. koeficienty

$$
\begin{aligned}
y_1' &= 4y_1 + 5y_2 \\
y_2 &= -2y_1 - 2y_2
\end{aligned}
$$

15.7 Řešení lin. soustav s konst. koeficienty

$$
\begin{aligned}
y_1' &= 4y_1 + 5y_2 \\
y_2 &= -2y_1 - 2y_2
\end{aligned}
$$

$$
\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix}
$$

15.7 Řešení lin. soustav s konst. koeficienty

$$y_1' = 4y_1 + 5y_2$$
$$y_2 = -2y_1 - 2y_2$$

$$\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{pmatrix}$$

15.7 Řešení lin. soustav s konst. koeficienty

$$
\begin{aligned}
y_1' &= 4y_1 + 5y_2 \\
y_2 &= -2y_1 - 2y_2
\end{aligned}
$$

$$
\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
y_1 + \frac{1}{2}y_2' + y_2 &= 0 \\
y_2'' - 2y_2' + 2y_2 &= 0
\end{aligned}
$$

15.7 Řešení lin. soustav s konst. koeficienty

$$y_2 = \alpha_1 e^t \sin t + \alpha_2 e^t \cos t$$

15.7 Řešení lin. soustav s konst. koeficienty

$$y_2 = \alpha_1 e^t \sin t + \alpha_2 e^t \cos t$$

$$y_1 = \left(-\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right) e^t \sin t + \left(-\frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2\right) e^t \cos t$$