

15 Diferenciální rovnice

15.1 Základní pojmy

Definice. Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'', y', y, x) = 0, \quad (1)$$

kde F je reálná funkce $n + 2$ proměnných.

Definice.

- **Řešením diferenciální rovnice (1)** rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I , která má v každém bodě intervalu I vlastní n -tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (1) v každém bodě intervalu I , tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y''(x), y'(x), y(x), x) = 0.$$

- Řešení y diferenciální rovnice (1) je **maximální**, pokud neexistuje takové řešení z , pro které $D_y \subsetneq D_z$ a které se na D_y shoduje s y .

15.2 Rovnice se separovanými proměnnými

Definice. Rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru

$$y' = g(y) \cdot h(x). \quad (2)$$

Metoda řešení pro spojitě g a h

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h .
2. Najdeme všechny nulové body funkce g . Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (2). Těmto řešením říkáme **singulární** nebo také **stacionární**.
3. Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g nenulová.
4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J . Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J . Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J . Existuje konstanta $c \in \mathbf{R}$ taková, že platí

$$G(y(x)) = H(x) + c$$

na definičním oboru řešení y , který nalezneme v následujícím kroku.

5. Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I; H(x) + c \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů musí mít řešení tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c),$$

kde G^{-1} značí funkci inverzní k funkci G . Ta existuje, neboť G je na intervalu J buď rostoucí nebo klesající.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení. Necht' y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (2), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c) , přičemž $b \in D_h$. Předpokládejme, že

$$\lim_{x \rightarrow b^-} y_1(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} y_2(x) = \alpha \in D_g$$

Pak funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, b); \\ \alpha, & x = b; \\ y_2(x), & x \in (b, c); \end{cases}$$

je řešením rovnice (2) na intervalu (a, c) .

15.3 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (3)$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b) , $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$ (**lineární diferenciální rovnice prvního řádu**).

Věta 15.1. Maximální řešení rovnice (3) splňující podmínku $y(x_0) = y_0$, kde $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbf{R}$, má tvar

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt \right) e^{-P(x)} + y_0 e^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),$$

kde P je primitivní funkce k p na (a, b) splňující $P(x_0) = 0$.

15.4 Lineární diferenciální rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(t), \quad (4)$$

kde a_0, \dots, a_{n-1} jsou reálná čísla a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b) (**lineární diferenciální rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty**).

Homogenní rovnici k rovnici (4) rozumíme rovnicí

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0. \quad (5)$$

Věta 15.2. *Nechť $t_0 \in (a, b)$ a $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbf{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení y rovnice (4), které splňuje podmínky*

$$y(t_0) = z_0, \quad y'(t_0) = z_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu (a, b) .

Věta 15.3.

- (i) *Maximální řešení rovnice (5) jsou definována na celém \mathbf{R} a tvoří vektorový podprostor prostoru $C^n(\mathbf{R})$ dimenze n .*
- (ii) *Nechť y_p je maximální řešení rovnice (4). Pak funkce y je jejím maximálním řešením, právě když ji lze zapsat ve tvaru $y = y_p + y_h$, kde y_h je vhodné řešení rovnice (5).*

Definice. Charakteristickým polynomem rovnice (5) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Věta 15.4. *Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou všechny různé reálné kořeny charakteristického polynomu χ s násobnostmi r_1, \dots, r_s . Necht' $\alpha_1 + \beta_1i, \dots, \alpha_l + \beta_li$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu χ s kladnou imaginární částí a násobnostmi q_1, \dots, q_l .*

Pak funkce

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 t}, & t e^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{r_1-1} e^{\lambda_1 t}, \\ \vdots & & & \\ e^{\lambda_s t}, & t e^{\lambda_s t}, & \dots & t^{r_s-1} e^{\lambda_s t}, \\ e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, & t e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1} e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, \\ e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t, & t e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1} e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t, \\ \vdots & & & \\ e^{\alpha_l t} \cos \beta_l t, & t e^{\alpha_l t} \cos \beta_l t, & \dots & t^{q_l-1} e^{\alpha_l t} \cos \beta_l t, \\ e^{\alpha_l t} \sin \beta_l t, & t e^{\alpha_l t} \sin \beta_l t, & \dots & t^{q_l-1} e^{\alpha_l t} \sin \beta_l t \end{array}$$

tvoří fundamentální systém řešení rovnice (5).

Označení. Množinu všech komplexních polynomů označíme \mathcal{P} .

Lemma 15.5. Necht' $\omega \in \mathbb{C}$ a $L : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ je definováno předpisem $L(P) = \omega P + P'$. Potom pro $k \in \mathbb{N}$ a $P \in \mathcal{P}$ platí

$$L^k(P) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \omega^{k-j} P^{(j)}.$$

Tvrzení (připomenutí z algebry). Necht' Q je polynom a $\omega \in \mathbb{C}$ je jeho kořen násobnosti $s \in \mathbb{N}$. Potom

$$Q(\omega) = Q'(\omega) = \dots = Q^{(s-1)}(\omega) = 0.$$

Lemma 15.6. Necht' $\omega \in \mathbb{C}$ je d -násobný kořen polynomu $Q(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ a P je polynom splňující $\text{st } P < d$. Potom

$$\sum_{k=0}^n a_k L^k(P) = 0,$$

kde $L(P) = \omega P + P'$.

Lemma 15.7. Necht' y_1, \dots, y_n tvoří fundamentální systém rovnice (5). Potom matice

$$U(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

je regulární pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Věta 15.8. Necht'

$$f(t) = e^{\mu t} \cdot (P(t) \cos vt + Q(t) \sin vt),$$

kde $\mu, v \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (4) ve tvaru

$$y_0(t) = t^m e^{\mu t} \cdot (R(t) \cos vt + S(t) \sin vt),$$

kde R, S jsou vhodné polynomy stupně ne většího než $\max\{\text{stupeň } P, \text{stupeň } Q\}$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $\mu + i v$ jakožto kořen charakteristického polynomu.

15.5 Soustavy diferenciálních rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{6}$$

kde $f_i, i = 1, \dots, n$, jsou dané funkce definované na jisté neprázdné otevřené podmnožině $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.

Vektorový tvar:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)),$$

kde máme $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$, $\mathbf{x}'(t) = [x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)]$ a dále $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]$.

Definice.

- **Řešením soustavy (6)** rozumíme vektorovou funkci $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $J \subset \mathbf{R}$ s hodnotami v \mathbf{R}^n takovou, že pro každé $t \in J$ existují vlastní derivace $x'_i(t), i = 1, \dots, n$, a platí (6).
- **Počáteční úlohou** pro (6) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení \mathbf{x} soustavy (6) splňující navíc předem zadanou podmínku $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, kde $[t_0, \mathbf{x}^0] \in G$ (tzv. **počáteční podmínka**).
- **Maximální řešení** soustavy (6) je takové řešení \mathbf{x} definované na intervalu J , které již nelze prodloužit, tj. je-li \mathbf{y} řešení definované na intervalu $I, J \subset I$ a $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t)$ pro každé $t \in J$, pak $J = I$.

Věta 15.9 (Peanova věta o existenci). *Necht' $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbf{R}^n$ je spojitá na G . Pak pro každé $[t_0, \mathbf{x}^0] \in G$ existuje maximální řešení rovnice (6) splňující $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$.*

Věta 15.10 (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti). *Necht' $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\mathbf{f} : [t, \mathbf{x}] \mapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{R}^n$ je spojitě zobrazení na G a je „lokálně lipschitzovské v \mathbf{x} “, tj. pro každý bod $[t, \mathbf{x}] \in G$ existuje $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$, a $L \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé dva body $[s, \mathbf{x}^1], [s, \mathbf{x}^2] \in B([t, \mathbf{x}], \varepsilon)$ máme*

$$\|\mathbf{f}(s, \mathbf{x}^1) - \mathbf{f}(s, \mathbf{x}^2)\| \leq L\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|.$$

Jestliže $[t_0, \mathbf{x}^0] \in G$, potom existuje právě jedno maximální řešení rovnice (6) splňující $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$.

Tvrzení (princip maxima). *Necht' A je množina uspořádaná relací \leq tak, že každý řetězec je shora omezený. Potom ke každému $a \in A$ existuje maximální prvek $b \in A$ takový, že $a \leq b$.*

15.6 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ x'_2 &= a_{21}(t)x_1 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{aligned} \tag{7}$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_{ij} : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}$, $b_i : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, jsou spojité funkce.

Vektorový tvar:

$$\mathbf{x}' = \mathbb{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t),$$

kde

$$\mathbb{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Věta 15.11 (o existenci a jednoznačnosti řešení). *Necht' $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{R}^n$. Necht' $\mathbb{A} : (\alpha, \beta) \rightarrow M(n \times n)$, $\mathbf{b} : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení \mathbf{x} soustavy (7) splňující $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$. Toto řešení je definováno na celém intervalu (α, β) .*

Definice. Homogenní soustavou k (7) rozumíme soustavu

$$\mathbf{x}' = \mathbb{A}(t)\mathbf{x}. \quad (8)$$

Věta 15.12. *Necht' $n \in \mathbf{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*$, $\alpha < \beta$, a $\mathbb{A} : (\alpha, \beta) \rightarrow M(n \times n)$ je spojitě zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení soustavy (8) tvoří vektorový podprostor prostoru $C^1((\alpha, \beta), \mathbf{R}^n)$. Dimenze tohoto podprostoru je rovna n .*

Věta 15.13. *Necht' $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*$, $\alpha < \beta$ a $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{R}^n$. Necht' $\mathbb{A} : (\alpha, \beta) \rightarrow M(n \times n)$, $\mathbf{b} : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Necht' \mathbf{y} je řešení (7) na intervalu (α, β) . Potom každé řešení \mathbf{x} soustavy (7) na intervalu (α, β) má tvar $\mathbf{y} + \mathbf{z}$, kde \mathbf{z} je jisté řešení (8).*

Definice. Necht' vektorové funkce $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^n$ tvoří bázi prostoru řešení rovnice (8) na (α, β) . Takovou množinu řešení nazýváme **fundamentální systém** rovnice (8). Označme

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & \dots & y_1^n(t) \\ y_2^1(t) & \dots & y_2^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Matici Φ nazýváme **fundamentální maticí** soustavy (8).

Lemma 15.14. Necht' Φ je fundamentální matice rovnice (8). Pak $\Phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (\alpha, \beta)$.

Věta 15.15 (variacie konstant). Necht' $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\mathbf{y}^0 \in \mathbf{R}^n$. Pak maximální řešení \mathbf{y} rovnice (7) s počáteční podmínkou $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0$ má tvar

$$\mathbf{y}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{y}^0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s) ds, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

kde Φ je fundamentální matice soustavy (8).

15.7 Řešení lineárních soustav s konstantními koeficienty

Věta 15.16. Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ a vektorová funkce $\mathbf{y} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ je řešením soustavy $\mathbf{y}' = \mathbb{A}\mathbf{y}$. Pak \mathbf{y} je třídy C^∞ a pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí $\mathbf{y}^{(k)}(x) = \mathbb{A}^k \mathbf{y}(x)$ pro $x \in \mathbf{R}$.

Definice. Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ , nazýváme λ -maticí. Řádkovými úpravami λ -matice rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,
- přičtení $P(\lambda)$ -násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ .

Lemma 15.17. Necht' $\Lambda = (P_1, \dots, P_n)^T$ je λ -matice. Potom ji lze konečnou posloupností řádkových úprav převést na λ -matici $\tilde{\Lambda} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n)^T$, kde nejvýše jeden z polynomů $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ je nenulový.

Věta 15.18. Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Pak lze λ -matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou λ -matici. Výsledná λ -matice má na diagonále nenulové polynomy, součet jejichž stupňů je n .

Označení.

- Necht' $P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ je polynom a $\mathbf{y} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je funkce mající vlastní derivaci n -tého řádu na \mathbf{R} . Potom symbol $P(\frac{d}{dx})\mathbf{y}$ značí funkci $a_n\mathbf{y}^{(n)} + a_{n-1}\mathbf{y}^{(n-1)} + \dots + a_1\mathbf{y}' + a_0\mathbf{y}$.
- Necht' $\mathbb{P} = (P_{ij})$ je λ -matice typu $n \times n$. Soustavou diferenciálních rovnic odpovídající \mathbb{P} budeme rozumět soustavu

$$\begin{aligned} P_{11}(\frac{d}{dx})y_1 + \dots + P_{1n}(\frac{d}{dx})y_n &= 0, \\ &\vdots \\ P_{n1}(\frac{d}{dx})y_1 + \dots + P_{nn}(\frac{d}{dx})y_n &= 0. \end{aligned}$$

Věta 15.19. Necht' λ -matice $\tilde{\mathbb{P}}$ vznikla konečnou posloupností řádkových úprav z λ -matice \mathbb{P} . Potom vektorová funkce $\mathbf{y} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ třídy C^∞ je řešením soustavy odpovídající matici \mathbb{P} , právě když je řešením soustavy odpovídající $\tilde{\mathbb{P}}$.