17. Fourierovy řady

Základní pojmy

Definice

- **Trigonometrickou řadou** rozumíme řadu funkcí

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

kde $c_k \in \mathbf{C}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Základní pojmy

Definice

- **Trigonometrickou řadou** rozumíme řadu funkcí
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$
kde $c_k \in \mathbf{C}$, $k \in \mathbf{Z}$.
- **Trigonometrickým polynomem** rozumíme funkci tvaru
$$x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$
kde $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $c_k \in \mathbf{C}$, $k = -n, \ldots, n$.

Rovnice vedení tepla

Uvažujme **rovnici vedení tepla**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Rovnice vedení tepla

Uvažujme **rovnici vedení tepla**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Hledáme funkci $u : \mathbf{R} \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$, která řeší (1) a navíc splňuje počáteční podmínku $u(x, 0) = f(x)$, kde f je daná 2π-periodická funkce.

Rovnice vedení tepla

Hledejme nejprve řešení (1) ve tvaru $u(x,t) = A(x)B(t)$, kde A, B jsou nenulové dostatečně hladké funkce.

Rovnice vedení tepla

Hledejme nejprve řešení (1) ve tvaru $u(x,t) = A(x)B(t)$, kde A, B jsou nenulové dostatečně hladké funkce.
Po dosazení dostáváme na A, B podmínku

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}.$$

Rovnice vedení tepla

Hledejme nejprve řešení (1) ve tvaru $u(x,t) = A(x)B(t)$, kde A, B jsou nenulové dostatečně hladké funkce.
Po dosazení dostáváme na A, B podmínku

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}.$$

Levá strana závisí pouze na t a pravá pouze na x. Proto musí být oba výrazy nezávislé na t, resp. x, a tedy konstatní.

Rovnice vedení tepla

Hledejme nejprve řešení (1) ve tvaru $u(x,t) = A(x)B(t)$, kde A, B jsou nenulové dostatečně hladké funkce.
Po dosazení dostáváme na A, B podmínku

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}.$$

Levá strana závisí pouze na t a pravá pouze na x. Proto musí být oba výrazy nezávislé na t, resp. x, a tedy konstatní. Označme odpovídající konstantu λ.

Rovnice vedení tepla

Hledejme nejprve řešení (1) ve tvaru $u(x,t) = A(x)B(t)$, kde A, B jsou nenulové dostatečně hladké funkce.
Po dosazení dostáváme na A, B podmínku

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}.$$

Levá strana závisí pouze na t a pravá pouze na x. Proto musí být oba výrazy nezávislé na t, resp. x, a tedy konstatní. Označme odpovídající konstantu λ. Funkce A musí být 2π-periodická, a proto $\lambda = -n^2$, kde $n \in \mathbf{Z}$.

Rovnice vedení tepla

Hledejme nejprve řešení (1) ve tvaru $u(x,t) = A(x)B(t)$, kde A, B jsou nenulové dostatečně hladké funkce.
Po dosazení dostáváme na A, B podmínku

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}.$$

Levá strana závisí pouze na t a pravá pouze na x. Proto musí být oba výrazy nezávislé na t, resp. x, a tedy konstatní. Označme odpovídající konstantu λ. Funkce A musí být 2π-periodická, a proto $\lambda = -n^2$, kde $n \in \mathbf{Z}$.
Funkce A je tedy lineární kombinací funkcí e^{inx} a e^{-inx}.

Rovnice vedení tepla

Hledejme nejprve řešení (1) ve tvaru $u(x,t) = A(x)B(t)$, kde A, B jsou nenulové dostatečně hladké funkce.
Po dosazení dostáváme na A, B podmínku

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}.$$

Levá strana závisí pouze na t a pravá pouze na x. Proto musí být oba výrazy nezávislé na t, resp. x, a tedy konstatní. Označme odpovídající konstantu λ. Funkce A musí být 2π-periodická, a proto $\lambda = -n^2$, kde $n \in \mathbf{Z}$.
Funkce A je tedy lineární kombinací funkcí e^{inx} a e^{-inx}.
Funkce B je pak násobkem $e^{-n^2 t}$.

Rovnice vedení tepla

Tyto úvahy nás vedou k hledání řešení ve tvaru

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} e^{inx}. \tag{2}$$

Rovnice vedení tepla

Tyto úvahy nás vedou k hledání řešení ve tvaru

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} e^{inx}. \tag{2}$$

Pro $t = 0$ má platit

$$u(x,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}.$$

Lemma 17.1

Nechť posloupnost $\left\{\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně k* f *na* $\mathbf{R}$. *Potom pro každé* $k \in \mathbf{Z}$ *platí*

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt.$$

Základní pojmy

Označení

(i) Množinu všech 2π-periodických funkcí s hodnotami v **C**, které jsou lebesgueovsky integrovatelné na intervalu $[0, 2\pi]$, budeme značit $\mathcal{P}(2\pi)$.

(ii) Pro $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ definujeme pseudonormu předpisem

$$||f||_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx.$$

Základní pojmy

Definice (komplexní tvar Fourierovy řady)

Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. Pak definujeme

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

Čísla $\hat{f}(k)$, $k \in \mathbf{Z}$, nazýváme **komplexními Fourierovými koeficienty**. Řadu $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$ nazýváme **komplexním tvarem Fourierovy řady funkce** f a jejím n**-tým částečným součtem** rozumíme

$$s_n^f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}, \qquad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Základní pojmy

Řekneme, že **součet Fourierovy řady** v bodě $x \in \mathbf{R}$ je roven $s \in \mathbf{C}$, jestliže $\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) = s$.

J. Fourier (1768–1830)

Lemma 17.2

Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ *a* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Potom*

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\,dt.$$

Základní pojmy

Označení

Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a g je esenciálně omezená měřitelná 2π-periodická funkce. Potom definujeme

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt.$$

Funkce $f * g$ se nazývá **konvoluce**.

Definice

Řekneme, že řada komplexních čísel $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je **sčítatelná Cesàrovou metodou** k číslu $\sigma \in \mathbf{C}$, jestliže platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = \sigma,$$

kde $s_k = \sum_{j=0}^{k} a_j$. Píšeme $(C)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma$.

Označení

- Pro $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ položíme

$$\sigma_n^f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} s_j^f(x).$$

Cesàrovská sčítatelnost Fourierových řad

Označení

- Pro $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ položíme

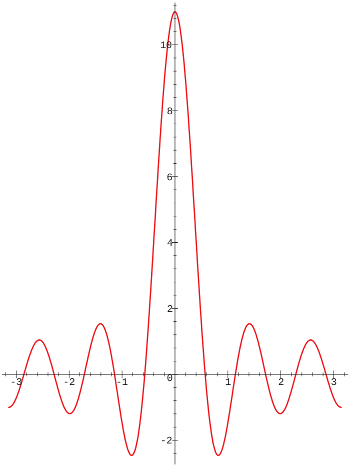
$$\sigma_n^f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} s_j^f(x).$$

- Pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ položíme

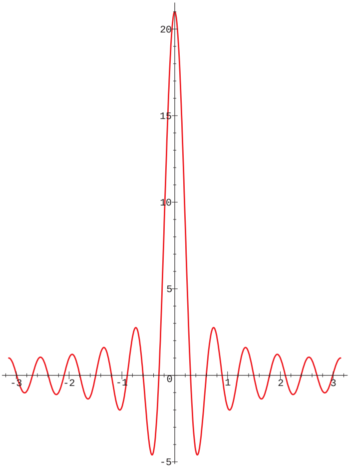
$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}, \qquad \textbf{(Dirichletovo jádro)}$$

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} D_j(x). \qquad \textbf{(Fejérovo jádro)}$$

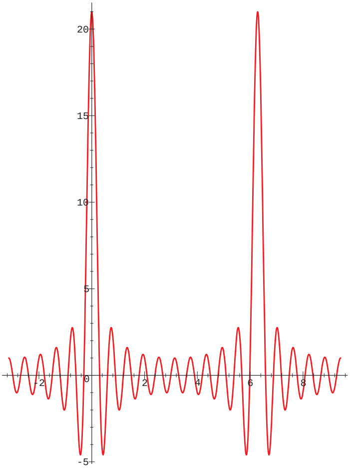
Dirichletovo jádro



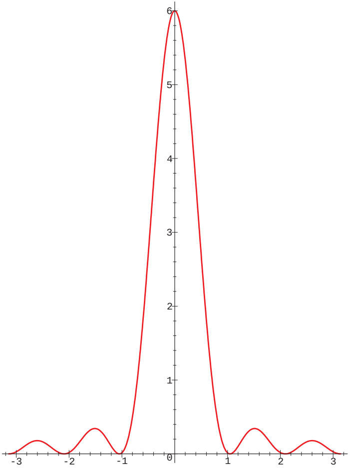
Dirichletovo jádro



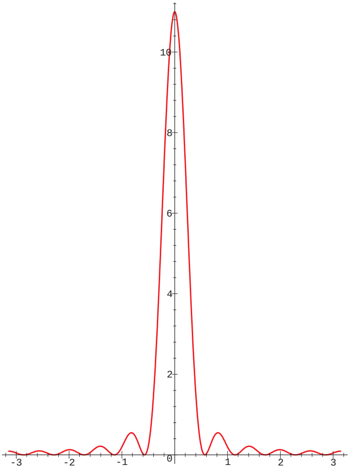
Dirichletovo jádro



Fejérovo jádro



Fejérovo jádro



Lemma 17.3 (vlastnosti Dirichletova jádra)

(i) *Pro každé* $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ *platí*

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x}.$$

Lemma 17.3 (vlastnosti Dirichletova jádra)

(i) *Pro každé* $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ *platí*

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x}.$$

(ii) *Funkce* D_n *je spojitá, sudá,* 2π*-periodická a* $D_n(0) = 2n + 1$*.*

Lemma 17.3 (vlastnosti Dirichletova jádra)

(i) *Pro každé* $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ *platí*

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

(ii) *Funkce* D_n *je spojitá, sudá,* 2π*-periodická a* $D_n(0) = 2n+1$.

(iii) *Platí* $\int_0^{2\pi} D_n(x)\,dx = 2\pi$.

Lemma 17.3 (vlastnosti Dirichletova jádra)

(i) *Pro každé* $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ *platí*

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x}.$$

(ii) *Funkce* D_n *je spojitá, sudá,* 2π*-periodická a* $D_n(0) = 2n + 1$.

(iii) *Platí* $\int_0^{2\pi} D_n(x)\, dx = 2\pi$.

(iv) *Pro každé* $f \in \mathcal{P}(2\pi)$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *a* $x \in \mathbf{R}$ *platí* $s_n^f(x) = f * D_n(x)$.

Lemma 17.4 (vlastnosti Fejérova jádra)

(i) *Pro každé* $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ *platí*

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2 .$$

Lemma 17.4 (vlastnosti Fejérova jádra)

(i) *Pro každé* $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ *platí*

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2.$$

(ii) *Funkce* K_n *je spojitá, nezáporná, sudá,* 2π*-periodická a* $K_n(0) = n+1$*.*

Lemma 17.4 (vlastnosti Fejérova jádra)

(i) *Pro každé* $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ *platí*

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} \right)^2 .$$

(ii) *Funkce* K_n *je spojitá, nezáporná, sudá,* 2π*-periodická a* $K_n(0) = n + 1$*.*

(iii) *Platí* $\int_0^{2\pi} K_n(x)\, dx = 2\pi$*.*

Lemma 17.4 (vlastnosti Fejérova jádra)

(i) *Pro každé* $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ *platí*

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2 .$$

(ii) *Funkce* K_n *je spojitá, nezáporná, sudá,* 2π*-periodická a* $K_n(0) = n+1$*.*

(iii) *Platí* $\int_0^{2\pi} K_n(x)\, dx = 2\pi$*.*

(iv) *Pro každé* $f \in \mathcal{P}(2\pi)$*,* $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *a* $x \in \mathbf{R}$ *platí* $\sigma_n^f(x) = f * K_n(x)$*.*

Lemma 17.4 (vlastnosti Fejérova jádra)

(i) *Pro každé* $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$ *platí*

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2 .$$

(ii) *Funkce* K_n *je spojitá, nezáporná, sudá,* 2π*-periodická a* $K_n(0) = n+1$*.*

(iii) *Platí* $\int_0^{2\pi} K_n(x)\,dx = 2\pi$*.*

(iv) *Pro každé* $f \in \mathcal{P}(2\pi)$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *a* $x \in \mathbf{R}$ *platí* $\sigma_n^f(x) = f * K_n(x)$*.*

(v) *Posloupnost* $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$ *konverguje lokálně stejnoměrně k nulové funkci na intervalu* $(0, 2\pi)$*.*

Věta 17.5 (Fejérova věta)

Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a $x \in \mathbf{R}$.

(i) *Má-li f v bodě x konečné jednostranné limity $f(x+)$, $f(x-)$, pak*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)).$$

(ii) *Je-li f spojitá na intervalu $(a, b) \subset \mathbf{R}$, pak $\{\sigma_n^f\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje lokálně stejnoměrně k f na (a, b).*

Důsledek 17.6

Nechť $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *je spojitá* 2π*-periodická funkce. Potom existuje posloupnost trigonometrických polynomů* $\{P_n\}$*, která stejnoměrně konverguje k* f *na* $\mathbf{R}$*.*

Věta 17.7

Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} ||f - \sigma_n^f||_1 = 0$.

Věta 17.7

Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} ||f - \sigma_n^f||_1 = 0$.

Věta 17.8 (Riemann-Lebesgueovo lemma)

Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. *Potom* $\lim_{k\to\pm\infty} \hat{f}(k) = 0$.

Věta 17.7

Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} \|f - \sigma_n^f\|_1 = 0$.

Věta 17.8 (Riemann-Lebesgueovo lemma)

Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. *Potom* $\lim_{k\to\pm\infty} \hat{f}(k) = 0$.

Věta 17.9 (o lokalizaci)

Nechť $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$, $x \in \mathbf{R}$, $f, g \in \mathcal{P}(2\pi)$ *a* $f(t) = g(t)$ *pro každé* $t \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} (s_n^f(x) - s_n^g(x)) = 0$.

Cesàrovská sčítatelnost Fourierových řad

Věta 17.7

Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} \|f - \sigma_n^f\|_1 = 0$.

Věta 17.8 (Riemann-Lebesgueovo lemma)

Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. *Potom* $\lim_{k\to\pm\infty} \hat{f}(k) = 0$.

Věta 17.9 (o lokalizaci)

Nechť $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$, $x \in \mathbf{R}$, $f, g \in \mathcal{P}(2\pi)$ *a* $f(t) = g(t)$ *pro každé* $t \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. *Potom* $\lim_{n\to\infty}(s_n^f(x) - s_n^g(x)) = 0$.

Věta 17.10

Nechť $f, g \in \mathcal{P}(2\pi)$ *a* $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ *pro každé* $k \in \mathbf{Z}$. *Potom* $f = g$ *s.v.*

Věta 17.11 (Hardy)

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je posloupnost komplexních čísel taková, že existuje* $K \in \mathbf{R}$ *splňující* $|ka_k| \le K$ *pro každé* $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$*. Pokud* $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \in \mathbf{C}$*, potom* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$*.*

G. H. Hardy (1877–1947)

K důkazu Hardyho věty

$$([\lambda n] + 1)\sigma_{[\lambda n]} - (n + 1)\sigma_n = s_{n+1} + \cdots + s_{[\lambda n]}$$

K důkazu Hardyho věty

$$
\begin{aligned}
&([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]} - (n+1)\sigma_n = s_{n+1} + \cdots + s_{[\lambda n]} \\
&= ([\lambda n]-n)s_n + ([\lambda n]-n)a_{n+1} + \cdots + a_{[\lambda n]}
\end{aligned}
$$

K důkazu Hardyho věty

$$([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]}-(n+1)\sigma_n = s_{n+1}+\cdots+s_{[\lambda n]}$$
$$= ([\lambda n]-n)s_n + ([\lambda n]-n)a_{n+1}+\cdots+a_{[\lambda n]}$$

$$([\lambda n]-n)(s_n-\sigma_n) = ([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]}-(n+1)\sigma_n$$
$$-\sum_{n<k\le[\lambda n]}([\lambda n]+1-k)a_k-([\lambda n]-n)\sigma_n$$

K důkazu Hardyho věty

$$([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]}-(n+1)\sigma_n = s_{n+1}+\cdots+s_{[\lambda n]}$$
$$= ([\lambda n]-n)s_n + ([\lambda n]-n)a_{n+1}+\cdots+a_{[\lambda n]}$$

$$([\lambda n]-n)(s_n-\sigma_n) = ([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]}-(n+1)\sigma_n$$
$$-\sum_{n<k\leq[\lambda n]}([\lambda n]+1-k)a_k-([\lambda n]-n)\sigma_n$$
$$= ([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]}-([\lambda n]+1)\sigma_n-\sum_{n<k\leq[\lambda n]}([\lambda n]+1-k)a_k$$

K důkazu Hardyho věty

$$([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]}-(n+1)\sigma_n = s_{n+1}+\cdots+s_{[\lambda n]}$$
$$= ([\lambda n]-n)s_n + ([\lambda n]-n)a_{n+1}+\cdots+a_{[\lambda n]}$$

$$([\lambda n]-n)(s_n-\sigma_n) = ([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]}-(n+1)\sigma_n$$
$$-\sum_{n<k\le[\lambda n]}([\lambda n]+1-k)a_k-([\lambda n]-n)\sigma_n$$
$$= ([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]}-([\lambda n]+1)\sigma_n-\sum_{n<k\le[\lambda n]}([\lambda n]+1-k)a_k$$

$$s_n-\sigma_n = \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(\sigma_{[\lambda n]}-\sigma_n)$$
$$-\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{n<k\le[\lambda n]}([\lambda n]+1-k)a_k$$

Lemma 17.12

Pokud f je 2π-periodická funkce s konečnou variací na intervalu $[0, 2\pi]$, potom existuje $K \in \mathbf{R}$ takové, že $|k\hat{f}(k)| \leq K$ pro každé $k \in \mathbf{Z}$.

Věta 17.13 (Jordan-Dirichletovo kritérium)

Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ je funkce s konečnou variací na intervalu $[0, 2\pi]$ a $x \in \mathbf{R}$. Potom funkce f má v bodě x vlastní limitu zprava i zleva (označme je $f(x+)$ a $f(x-)$) a platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)).$$

Bodová konvergence Fourierových řad

Věta 17.13 (Jordan-Dirichletovo kritérium)

Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ je funkce s konečnou variací na intervalu $[0, 2\pi]$ a $x \in \mathbf{R}$. Potom funkce f má v bodě x vlastní limitu zprava i zleva (označme je $f(x+)$ a $f(x-)$) a platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)).$$

Je-li navíc f spojitá na otevřeném intervalu $I \subset \mathbf{R}$, pak $s_n^f \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na intervalu I.

Věta 17.14 (Diniho kritérium)

Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$, $x \in \mathbf{R}$, $s \in \mathbf{C}$ *a nechť existuje* $\delta > 0$ *takové, že integrál*

$$\int_0^{\delta} \frac{f(x+v) + f(x-v) - 2s}{v} dv$$

konverguje. Potom $\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) = s$.