18. Hilbertovy prostory

Věta 18.1

Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *je unitární prostor nad tělesem* $\mathbb{F}$ *reálných nebo komplexních čísel. Potom* $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ *je norma na* X*.*

Věta 18.1

Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je unitární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ reálných nebo komplexních čísel. Potom $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ je norma na X.

Lemma 18.2

Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je unitární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Na $X \times X$ uvažujme metriku

$$\rho((u, v), (u', v')) = \max\{||u - u'||, ||v - v'||\}.$$

Potom je zobrazení $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ spojité.

Hilbertovy prostory

Definice

Nechť X je unitární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Pokud je X úplný vzhledem k metrice indukované normou $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, pak se nazývá **Hilbertovým prostorem**.

D. Hilbert (1862–1943)

Hilbertovy prostory

Definice

Nechť X je unitární prostor, Γ je indexová množina a $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ je systém prvků prostoru X.

(i) Řekneme, že indexovaný systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je **ortogonální**, jestliže platí

$$\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma, \gamma \neq \gamma' \colon \langle x_\gamma, x_{\gamma'} \rangle = 0.$$

Hilbertovy prostory

Definice

Nechť X je unitární prostor, Γ je indexová množina a $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ je systém prvků prostoru X.

(i) Řekneme, že indexovaný systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je **ortogonální**, jestliže platí

$$\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma, \gamma \neq \gamma' \colon \langle x_\gamma, x_{\gamma'} \rangle = 0.$$

Jestliže navíc $||x_\gamma|| = 1$ pro každé $\gamma \in \Gamma$, potom říkáme, že je systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ **ortonormální**.

Hilbertovy prostory

Definice

Nechť X je unitární prostor, Γ je indexová množina a $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ je systém prvků prostoru X.

(i) Řekneme, že indexovaný systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je **ortogonální**, jestliže platí

$$\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma, \gamma \neq \gamma' \colon \langle x_\gamma, x_{\gamma'} \rangle = 0.$$

Jestliže navíc $||x_\gamma|| = 1$ pro každé $\gamma \in \Gamma$, potom říkáme, že je systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ **ortonormální**.

(ii) Ortogonální systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je **úplný**, jestliže jeho lineární obal je hustý v X.

Hilbertovy prostory

Definice

Nechť X je unitární prostor, Γ je indexová množina a $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ je systém prvků prostoru X.

(i) Řekneme, že indexovaný systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je **ortogonální**, jestliže platí

$$\forall\gamma,\gamma'\in\Gamma,\gamma\neq\gamma'\colon\langle x_\gamma,x_{\gamma'}\rangle=0.$$

Jestliže navíc $||x_\gamma||=1$ pro každé $\gamma\in\Gamma$, potom říkáme, že je systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ **ortonormální**.

(ii) Ortogonální systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je **úplný**, jestliže jeho lineární obal je hustý v X.

(iii) Ortogonální systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je **maximální**, jestliže neexistuje prvek $u\in X\setminus\{0\}$ kolmý na každý vektor x_γ, $\gamma\in\Gamma$.

Věta 18.3

Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ortogonální posloupnost v Hilbertově prostoru* X*.*

(i) *Potom řada* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konverguje, právě když konverguje řada* $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||^2$*.*

Věta 18.3

Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ortogonální posloupnost v Hilbertově prostoru* X.

(i) *Potom řada* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konverguje, právě když konverguje řada* $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||^2$.

(ii) *Konverguje-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, *potom*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||^2.$$

Věta 18.4

Nechť $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ortogonální posloupnost nenulových prvků v unitárním prostoru* X *nad* $\mathbb{F}$. *Nechť* $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$, *kde* $c_n \in \mathbb{F}$. *Potom* $c_n = \langle x, v_n \rangle / ||v_n||^2$, $n \in \mathbf{N}$ *(**Fourierův koeficient**).*

Věta 18.5

Nechť X je unitární prostor, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortonormální systém nenulových prvků v X, $x \in X$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq ||x||^2 \qquad \text{(Besselova nerovnost).}$$

Věta 18.5

Nechť X je unitární prostor, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortonormální systém nenulových prvků v X, $x \in X$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq ||x||^2 \qquad \textit{(Besselova nerovnost)}.$$

Pokud $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$, potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = ||x||^2 \qquad \textit{(Parsevalova rovnost)}.$$

Hilbertovy prostory

Definice

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{F}$. Posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z X se nazývá **(Schauderova) báze** prostoru X, jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje právě jedna posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků $\mathbb{F}$, pro kterou platí $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$.

Hilbertovy prostory

Definice

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{F}$.
Posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z X se nazývá **(Schauderova) báze** prostoru X, jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje právě jedna posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků $\mathbb{F}$, pro kterou platí $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$.

Věta 18.6

Nechť X je Hilbertův prostor a $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální systém nenulových prvků prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *$\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Schauderova báze,*

Hilbertovy prostory

Definice

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{F}$.
Posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z X se nazývá **(Schauderova) báze** prostoru X, jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje právě jedna posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků $\mathbb{F}$, pro kterou platí $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$.

Věta 18.6

Nechť X je Hilbertův prostor a $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální systém nenulových prvků prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je Schauderova báze,*

(ii) $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je úplný ortogonální systém,*

Definice

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{F}$.
Posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z X se nazývá **(Schauderova) báze** prostoru X, jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje právě jedna posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků $\mathbb{F}$, pro kterou platí $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$.

Věta 18.6

Nechť X je Hilbertův prostor a $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální systém nenulových prvků prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je Schauderova báze,*

(ii) $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je úplný ortogonální systém,*

(iii) $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je maximální ortogonální systém.*

Věta 18.7

(i) *Nechť X je nekonečně-dimenzionální separabilní Hilbertův prostor. Potom v X existuje ortonormální báze.*

Věta 18.7

(i) *Nechť X je nekonečně-dimenzionální separabilní Hilbertův prostor. Potom v X existuje ortonormální báze.*

(ii) *Nechť X_1, X_2 jsou nekonečně-dimenzionální separabilní Hilbertovy prostory. Potom jsou X_1 a X_2 izometricky izomorfní.*

Hilbertovy prostory

Věta 18.8

Prostor $L^2(0, 2\pi)$ *se skalárním součinem*

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\overline{g}$$

tvoří Hilbertův prostor. Systém e^{i0x}, e^{ix}, e^{-ix}, e^{i2x}, e^{-i2x}, $\ldots$ *tvoří ortonormální bázi* $L^2(0, 2\pi)$.

Důsledek 18.9

Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ *a* $|f|^2$ *je integrovatelná na* $[0, 2\pi]$*. Potom*

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} \quad v\, L^2(0, 2\pi) \qquad a$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2.$$

Důsledek 18.9

Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a $|f|^2$ je integrovatelná na $[0, 2\pi]$. Potom

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} \quad v\, L^2(0, 2\pi) \qquad a$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2.$$

Věta 18.10 (Riesz-Fischer)

Nechť c_n, $n \in \mathbf{Z}$, jsou komplexní čísla splňující $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. Pak existuje $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ taková, že $|f|^2$ je integrovatelná na $[0, 2\pi]$ a $\hat{f}(n) = c_n$.