BONUSOVÁ ÚLOHA ČÍSLO 1

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má spojitou druhou derivaci a splňuje $\lim_{x\to\infty}(f(x) + f'(x) + f''(x)) = L \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

Řešení. Označme $g = f + f' + f''$. Funkce f tedy řeší diferenciální rovnici

$$y'' + y' + y = g,$$

kde g je spojitá funkce na $\mathbb{R}$. Použijeme metodu variace konstant a odvodíme, že pro jistá $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) = q_1(x)e^{-\alpha x}\cos\beta x + q_2(x)e^{-\alpha x}\sin\beta x + c_1e^{-\alpha x}\cos\beta x + c_2e^{-\alpha x}\sin\beta x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

kde

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ q_1(x) &= -\frac{1}{\beta}\int_0^x g(t)e^{\alpha t}\sin\beta t\,dt, \\ q_2(x) &= \frac{1}{\beta}\int_0^x g(t)e^{\alpha t}\cos\beta t\,dt. \end{aligned}$$

Použitím goniometrických vzorců obdržíme

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{\beta}\int_0^x e^{\alpha(t-x)}g(t)\sin\beta(x-t)\,dt}_{h_1(x)} + \underbrace{c_1e^{-\alpha x}\cos\beta x + c_2e^{-\alpha x}\sin\beta x,}_{h_2(x)} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ukážeme, že $\lim_{x\to\infty} h_1(x) = L$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a k němu nalezneme $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > x_0 :\ |g(x) - L| < \varepsilon.$$

Pro $x > x_0$ máme

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \frac{1}{\beta}\int_0^{x_0} e^{\alpha(t-x)}g(t)\sin\beta(x-t)\,dt + \frac{1}{\beta}\int_{x_0}^x e^{\alpha(t-x)}g(t)\sin\beta(x-t)\,dt \\ &= \frac{1}{\beta}\int_0^{x_0} e^{\alpha t}g(t)\sin\beta(x-t)\,dt \cdot e^{-\alpha x} + \frac{1}{\beta}\int_{x_0}^x e^{\alpha(t-x)}(g(t)-L)\sin\beta(x-t)\,dt \\ &+ \frac{1}{\beta}\int_{x_0}^x e^{\alpha(t-x)}L\sin\beta(x-t)\,dt. \end{aligned}$$

Platí

$$\left|\frac{1}{\beta}\int_0^{x_0} e^{\alpha t}g(t)\sin\beta(x-t)\,dt\right| \le \frac{1}{\beta}\int_0^{x_0} e^{\alpha t}|g(t)|\,dt.$$

Pravá strana nezávisí na x, a proto

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\beta}\int_0^{x_0} e^{\alpha t}g(t)\sin\beta(x-t)\,dt \cdot e^{-\alpha x} = 0.$$

Dále máme

$$\left|\frac{1}{\beta}\int_{x_0}^{x} e^{\alpha(t-x)}(g(t)-L)\sin\beta(x-t)\,dt\right| \le \frac{1}{\beta}\int_{x_0}^{x} e^{\alpha(t-x)}\varepsilon\,dt$$
$$= \frac{1}{\beta}\frac{1}{\alpha}(1-e^{\alpha(x_0-x)})\varepsilon \le \frac{1}{\alpha\beta}\varepsilon.$$

Přímým výpočtem zjistíme, že

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\beta}\int_{x_0}^{x} e^{\alpha(t-x)}L\sin\beta(x-t)\,dt = L.$$

Dohromady tedy máme

$$L - \frac{1}{\alpha\beta}\varepsilon \le \liminf_{x\to\infty} h_1(x) \le \limsup_{x\to\infty} h_1(x) \le L + \frac{1}{\alpha\beta}\varepsilon. \tag{1}$$

Vztah (1) platí pro libovolné $\varepsilon > 0$, takže

$$\lim_{x\to\infty} h_1(x) = L.$$

Snadno vidíme, že $\lim_{x\to\infty} h_2(x) = 0$, čímž je tvrzení dokázáno.