Bonusová úloha číslo 2

Nechť $u \in C^1([0,1])$, $u(0) = u(1) = 0$. Potom

$$\int_0^1 |u(t)u'(t)|\,dt \le \frac{1}{4}\int_0^1 (u'(t))^2\,dt$$

a konstanta $\frac{1}{4}$ je nejlepší možná. Dokažte.

Řešení. Položme

$$g(x) = \int_0^x |u'| \quad \text{a} \quad h(x) = \int_x^1 |u'|.$$

Potom $g \ge |u|$ a $h \ge |u|$. Počítejme

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} |uu'| \le \int_0^{1/2} gg' &= \left[\frac{1}{2}g^2\right]_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{1/2} |u'|\right)^2 \le \frac{1}{2}\left(\int_0^{1/2} 1^2\right)\left(\int_0^{1/2} |u'|^2\right) \text{ (Cauchyova nerovnost)} \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{1/2} |u'|^2.\end{aligned}$$

Podobně

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^1 |uu'| \le \int_{1/2}^1 -hh' &= \left[-\frac{1}{2}h^2\right]_{1/2}^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{1/2}^1 |u'|\right)^2 \le \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_{1/2}^1 |u'|^2 \\ &= \frac{1}{4}\int_{1/2}^1 |u'|^2.\end{aligned}$$

Dohromady potom máme

$$\int_0^1 |uu'| \le \frac{1}{4}\int_0^1 (u')^2.$$

Položme

$$u(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1/2]; \\ 1 - x, & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Potom $|u'| = 1$ s.v. v $[0,1]$, a tedy $\int_0^1 |uu'| = \frac{1}{4}$ a $\frac{1}{4}\int_0^1 u'^2 = \frac{1}{4}$. Funkce u není třídy $\mathcal{C}^1$, ale pro libovolné $\varepsilon \in (0, 1/2)$ lze nalézt funkci v třídy $\mathcal{C}^1$ splňující $v(x) = u(x)$ pro $x \in [0,1] \setminus (\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon)$ a $|v'| \le 1$. Potom

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^2 \le \int_0^1 |vv'| \le \frac{1}{4}\int_0^1 (v')^2 \le \frac{1}{4}.$$

Odtud plyne optimalita $1/4$.