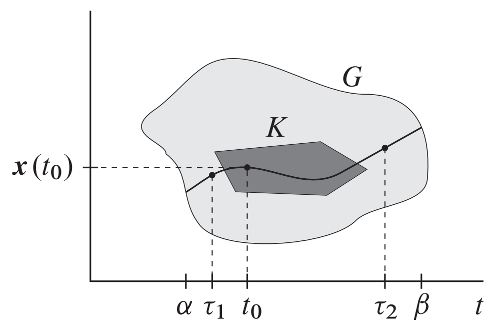
Soustavy diferenciálních rovnic

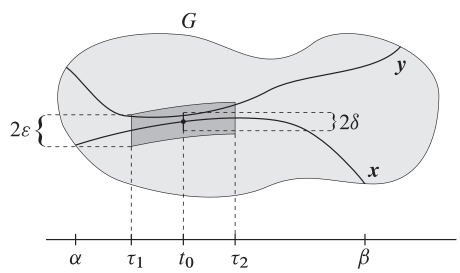
Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve vektorovém tvaru:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) \tag{1}$$

Věta (o opouštění kompaktu)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená, $K \subset G$ je kompaktní, zobrazení $\boldsymbol{f}$ je spojité na G, $\boldsymbol{x}$ je maximální řešení rovnice* (1) *definované na intervalu (α, β), $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $[t_0, \boldsymbol{x}(t_0)] \in K$. Pak existují $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$ a $\tau_2 \in (t_0, \beta)$ taková, že $[\tau_1, \boldsymbol{x}(\tau_1)] \notin K$ a $[\tau_2, \boldsymbol{x}(\tau_2)] \notin K$.*



Věta. *Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená a $\boldsymbol{f}$ je lokálně lipschitzovská ve druhé proměnné na G. Nechť $\boldsymbol{x}$ je maximální řešení soustavy* (1) *definované na (α, β) a $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Nechť dále $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle \subset (\alpha, \beta)$ je uzavřený interval obsahující t_0. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbf{R}^n$ splňující $\|\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{x}(t_0)\| < \delta$ platí: Každé maximální řešení $\boldsymbol{y}$ soustavy* (1) *splňující počáteční podmínku $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}^0$ je definováno na intervalu obsahujícím $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ a platí $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\| < \varepsilon$ pro každé $t \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$.*



Početní úlohy

1. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y},$$

která jsou omezená na $\mathbf{R}$.

Výsledek.

$$
\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} b-c \\ -b+c \\ b \end{pmatrix} \sin x + \begin{pmatrix} b+c \\ -b-c \\ c \end{pmatrix} \cos x, \qquad x \in \mathbf{R}.
$$

2. Uvažujte soustavu (S)

$$
\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}.
$$

Určete všechny prvky $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbf{R}^3$ takové, že maximální řešení soustavy (S) splňující $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^0$ je periodické.

Výsledek.

$$
\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b \\ a \\ a \end{pmatrix} \sin x + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}b \\ b \\ b \end{pmatrix} \cos x + \begin{pmatrix} c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2x}, \qquad x \in \mathbf{R}.
$$

Řešení je periodické pro $\boldsymbol{y}^0 \in \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \end{smallmatrix} \right); \alpha, \beta \in \mathbf{R} \right\}$.

3. Najděte maximální řešení soustavy

$$
\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}
$$

vyhovující počáteční podmínce $\boldsymbol{y}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$.

Výsledek.

$$
\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} -xe^x + e^x \\ -xe^x + e^x \\ e^x \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbf{R}
$$