1. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

1. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice $y' = \sqrt[5]{y^2}$.

2. Pro diferenciální rovnici $y' = \frac{y^2}{x^2}$ nalezněte

- všechna maximální řešení,
- maximální řešení procházející bodem $[1, 1/2]$,
- všechna maximální řešení, která jsou na svém definičním oboru omezená.

3. Pro diferenciální rovnici $y' = -\frac{(1+y^2)x}{1+x^2}$ nalezněte

- všechna maximální řešení,
- maximální řešení procházející bodem $[0, 1]$.

4. Nalezněte řešení rovnice $y' = \frac{\cos x}{e^y}$. Je množina bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází právě jedno řešení definované na celém $\mathbf{R}$, otevřená?

5. Řešte rovnici $y'(2-e^x) = -3e^x \operatorname{tg} y \cos^2 y$. Pro která A existuje řešení s vlastností $\lim_{x\to+\infty} y(x) - \lim_{x\to-\infty} y(x) = A$?

6. Nalezněte všechna maximální řešení rovnic:

- $y' = y^2$,
- $y' = |y|$,
- $y' = \sqrt{1-y^2}$,
- $(y')^2 = y^2$,
- $xy' = 1 + y^2$.

Výsledky

1.

$$y(x) = 0, \qquad x \in \mathbf{R};$$

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, c] \\ \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c)\right)^5} & x \in (c, \infty) \end{cases}, \qquad c \in \mathbf{R};$$

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c)\right)^5} & x \in (-\infty, c) \\ 0 & x \in [c, \infty) \end{cases}, \qquad c \in \mathbf{R};$$

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c_1)\right)^5} & x \in (-\infty, c_1) \\ 0 & x \in [c_1, c_2] \\ \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c_2)\right)^5} & x \in (c_2, \infty) \end{cases}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}, c_1 < c_2;$$

$$y(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c)\right)^5}, \quad x \in \mathbf{R}, \qquad c \in \mathbf{R}.$$

2. a) $y(x) = \frac{x}{1-cx}$ na intervalech $(0, 1/c)$, $(1/c, \infty)$, $(-\infty, 0)$ pro $c > 0$, na intervalech $(-\infty, 1/c)$, $(1/c, 0)$, $(0, \infty)$ pro $c < 0$; $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$ pro $c = 0$; $y(x) = 0$ na intervalech $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$.

b) $y(x) = \frac{x}{1-cx}$ na intervalu $(0, \infty)$

c) $y(x) = 0$ na intervalech $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$; $y(x) = \frac{x}{1-cx}$ na $(-\infty, 0)$ pro $c > 0$ a $(0, \infty)$ pro $c < 0$;

3. a) $y(x) = \mathrm{tg}(-\frac{1}{2}\log(1 + x^2) + c)$ na intervalech

$\left(-\sqrt{\exp(\pi + 2c) - 1}, \sqrt{\exp(\pi + 2c) - 1}\right)$ pro $|c| < \pi/2$,

$\left(-\sqrt{\exp(\pi + 2c) - 1}, -\sqrt{\exp(-\pi + 2c) - 1}\right)$ pro $|c| \geq \pi/2$,

$\left(\sqrt{\exp(-\pi + 2c) - 1}, -\sqrt{\exp(\pi + 2c) - 1}\right)$ pro $|c| \geq \pi/2$.

b) $y(x) = \mathrm{tg}\left(-\frac{1}{2}\log(1 + x^2) + \frac{\pi}{4}\right)$ na intervalu $\left(-\sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi) - 1}, \sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi) - 1}\right)$.