6. Fourierovy řady

1. Rozložte ve Fourierovy řady následující funkce:

(a) $f(x) = x^2,\ x \in (-\pi, \pi)$,
(b) $f(x) = x,\ x \in (-\pi, \pi)$,
(c) $f(x) = x^2,\ x \in (0, 2\pi)$,
(d) $f(x) = \sin^4 x,\ x \in (0, 2\pi)$,
(e) $f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (0, 2\pi)$,
(f) $f(x) = \sin ax,\ x \in (-\pi, \pi)$, a necelé,
(g) $f(x) = |\sin x|,\ x \in (-\pi, \pi)$,
(h) $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in [0,1], \\ 1 & \text{pro } x \in (1,2), \\ 3 - x & \text{pro } x \in [2,3]. \end{cases}$

2. Které koeficienty Fourierovy řady funkce $f \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$ se nulují, jestliže platí

- $f(x + \pi) = -f(x)$,
- $f(x + \pi) = f(x)$,
- $f(-x) = f(x)$ & $f(x + \pi) = -f(x)$.

3. V závislosti na parametru $\alpha > 0$ rozhodněte, kdy má funkce f definovaná předpisem $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$, $f(0) = 0$, konečnou variaci v intervalu $[0, 1]$.

4. Napište $\cos^{2m} x$ ve tvaru trigonometrického polynomu.

5. Nalezněte cosinovou řadu takovou, že její součet je roven x pro $x \in (0, \pi)$.

6. Nalezněte sinovou řadu takovou, že její součet je roven x^2 pro $x \in (-\pi, 0)$.

7. Pokud to lze, sečtěte metodou aritmetických průměrů tyto řady:

a) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$;
b) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$.