Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 2b (2)

LS 2009-10, 31. 5. 2010

---

1. Nechť je funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definována předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3 \cdot \sqrt{y}, & y \geq 0, \\ \sin y, & y < 0. \end{cases}$$

Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ splňující $y(0) = y(1) = 0$. (15 bodů)

2. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 4y' + 4y = x^2 e^{-2x} + 5 \sin x. \qquad \text{(15 bodů)}$$

3. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 + e^t, \\ y_2' &= 2y_1 + y_2 + e^t. \end{aligned}$$

(i) Nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy, která vyhovují počáteční podmínce $\boldsymbol{y}(0) = (0, 0)^T$.

(ii) Určete množinu všech $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbb{R}^2$, pro která platí: maximální řešení uvedené soustavy $\boldsymbol{y}$ vyhovující podmínce $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^0$ splňuje $\sup\{e^{-t} \|\boldsymbol{y}(t)\|;\ t \in [0, \infty)\} < \infty$.

(15 bodů)

4. Funkce f je definována na intervalu $[-\pi, \pi)$ předpisem

$$f(x) = \sin(x/2)$$

a je dodefinována 2π-periodicky na celém $\mathbb{R}$. Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet této řady pro každé $x \in \mathbb{R}$. Svá tvrzení zdůvodněte. (15 bodů)