

Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 2b (3)

LS 2009-10, 15. 6. 2010

1. Nalezněte všechna řešení následující diferenciální rovnice, která jsou definována na intervalu $(-1, 1)$.

$$y' = \frac{1}{y} \arcsin x \quad (15 \text{ bodů})$$

2. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 2y' + 2y = \sin x + 5xe^x. \quad (15 \text{ bodů})$$

3. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 - y_3 \\y_2' &= 2y_1 + y_2 - 2y_3 \\y_3' &= 2y_1 + y_2 - 2y_3.\end{aligned}$$

(i) Nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy, která vyhovují počáteční podmínce $\mathbf{y}(0) = (1, 1, 1)^T$.

(ii) Určete množinu všech $\mathbf{y}^0 \in \mathbb{R}^3$, pro která platí: maximální řešení uvedené soustavy \mathbf{y} vyhovující podmínce $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}^0$ je konstantní.

(15 bodů)

4. Funkce f je definována na \mathbb{R} předpisem

$$f(x) = \operatorname{sgn}(\sin(2x)) + \cos^3 x + \sin^3 x.$$

Spočítejte Fourierovu řadu funkce f a určete součet této řady v Cesàrově smyslu pro každé $x \in \mathbb{R}$. Svá tvrzení zdůvodněte. (15 bodů)

Výsledky

1.

$$y(x) = \sqrt{2x \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} + 2c}, \quad x \in (-1, 1), \quad c > -1;$$
$$y(x) = -\sqrt{2x \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} + 2c}, \quad x \in (-1, 1), \quad c > -1$$

2. $y(x) = \frac{1}{5} \sin x - \frac{2}{5} \cos x + xe^x - \frac{4}{5}e^x + c_1e^{-x} \sin x + c_2e^{-x} \cos x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

3.

(i) $y_1(t) = \cos t, \quad y_2(t) = \cos t + \sin t, \quad y_3(t) = \cos t + \sin t, \quad t \in \mathbb{R}$

(ii) $\{(c, 0, c)^T; \quad c \in \mathbb{R}\}$

4.

$$a_n = \begin{cases} \frac{3}{4}, & n = 1, \\ \frac{1}{4}, & n = 3, \\ 0, & n \in \{0, 2, 4, 5, \dots\}; \end{cases}$$
$$b_n = \begin{cases} -\frac{3}{4}, & n = 1, \\ \frac{1}{4}, & n = 3, \\ \frac{2}{\pi n}(1 + (-1)^n - 2\cos(n\frac{\pi}{2})), & n \in \{2, 4, 5, \dots\}. \end{cases}$$

Součet Fourierovy řady v Cesàrově smyslu v bodě x je roven $f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ podle Fejérové věty.