Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 2b (5)

LS 2009-10, 29. 6. 2010

---

1. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \sqrt{y} \cdot \operatorname{tg} x.$$

(15 bodů)

2. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}. \qquad \text{(15 bodů)}$$

3. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic $\boldsymbol{y}' = \mathbb{A}\boldsymbol{y}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte maximální řešení uvedené soustavy, které vyhovuje počáteční podmínce

$$\boldsymbol{y}(0) = (1, 1, 1)^T. \qquad \text{(15 bodů)}$$

4. Pro 2π-periodickou f funkci f, která je na intervalu $[-\pi, \pi)$ definována předpisem $f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$, nalezněte Fourierovu řadu a vyšetřete povahu její konvergence. Pro každé $x \in \mathrm{R}$ nalezněte součet řady. Svá tvrzení zdůvodněte. (15 bodů)

Řešení úloh

1. Definiční obor funkce $g(y) = \sqrt{y}$ je roven $[0,\infty)$ a $g(y) = 0$ právě když $y = 0$. Dostáváme tedy singulární řešení ve tvaru $y(x) = 0$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Nyní nalezneme všechna řešení, která mají hodnoty v $(0,\infty)$. Platí

$$\int y^{-1/2} dy \stackrel{c}{=} 2y^{1/2} \qquad (= G(y)), \qquad y \in (0,\infty),$$
$$\int \operatorname{tg} x \, dx \stackrel{c}{=} -\log|\cos x| \qquad (= H(x)), \qquad x \in I_k := (-\pi/2, \pi/2) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Funkce $G(y) = 2y^{1/2}$ zobrazuje interval $(0,\infty)$ na $(0,\infty)$. Zvolme pevně $k \in \mathbb{Z}$. V závislosti na $c \in \mathbb{R}$ nalezneme všechna $x \in I_k$ taková, že $H(x) + c \in G(0,\infty) = (0,\infty)$, neboli $-\log|\cos x| + c > 0$. Funkce $x \mapsto |\cos x|$ je π-periodická, takže stačí zjistit pro která $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ platí $|\cos x| < e^c$. Tuto nerovnost splňují

$$x \in \big(-\pi/2, -\arccos(e^c)\big) \cup \big(\arccos(e^c), \pi/2\big),$$

pokud $c \le 0$ a $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, pokud $c > 0$.

Označme

$$z_c(x) = \left(-\frac{1}{2}\log|\cos x| + \frac{c}{2}\right)^2.$$

Na intervalu I_k jsou pak definována následující řešení.

$$y(x) = z_c(x), \qquad x \in I_k, c > 0;$$
$$y(x) = \begin{cases} z_{c_1}(x), & x \in (-\pi/2, -\arccos(e^{c_1})) + k\pi, \\ 0, & x \in [-\arccos(e^{c_1}), \arccos(e^{c_2})] + k\pi, \\ z_{c_2}(x), & x \in (\arccos(e^{c_2}), \pi/2) + k\pi; \end{cases} \qquad c_1 \le 0, c_2 \le 0;$$
$$y(x) = \begin{cases} z_c(x), & x \in (-\pi/2, -\arccos(e^c)) + k\pi, \\ 0, & x \in [-\arccos(e^c), \pi/2) + k\pi, \end{cases} \qquad c \le 0;$$
$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi/2, \arccos(e^c)] + k\pi, \\ z_c(x), & x \in (\arccos(e^c), \pi/2) + k\pi; \end{cases} \qquad c \le 0;$$
$$y(x) = 0, \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2) + k\pi.$$

2. Charakteristický polynom homogenní rovnice má tvar $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Tento polynom má dvojnásobný kořen 1, takže fundamentální systém je tvořen funkcemi $x \mapsto e^x$, $x \mapsto xe^x$. Pro nalezení partikulárního řešení použijeme metodu variace konstant. Řešení budeme hledat ve tvaru

$$y(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x.$$

Funkce c_1, c_2 pak mají splňovat soustavu

$$\begin{aligned} c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x &= 0, \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x)(e^x + xe^x) &= \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$c_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}, \qquad c_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Až na aditivní konstantu máme

$$c_1(x) = \sqrt{4-x^2}, \qquad c_2(x) = \arcsin(x/2).$$

Maximální řešení má tedy tvar

$$y(x) = \sqrt{4-x^2}e^x + \arcsin(x/2)xe^x + \alpha e^x + \beta xe^x, \qquad x \in (-2,2), \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

3. Počítejme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ -4 & \lambda-1 & 4 \\ -4 & 0 & \lambda+3 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & \lambda+3 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{4}(\lambda-1)(\lambda+3) \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & \lambda+3 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & 8 & \lambda^2+2\lambda-3 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & \lambda+3 \\ 0 & 8 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+5) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Uvedené matici odpovídá soustava diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} -4y_1 + y_3' + 3y_3 &= 0, \\ 8y_2 + y_3'' + 2y_3' - 3y_3 &= 0, \\ y_3''' + y_3'' + 3y_3' - 5y_3 &= 0. \end{aligned}$$

Charakteristický polynom poslední rovnice má kořeny $1, -1+2i$ a $-1-2i$. Řešení rovnice má tedy tvar

$$y_3(t) = ae^t + be^{-t}\cos 2t + ce^{-t}\sin 2t.$$

Z první a druhé rovnice postupně vypočteme

$$\begin{aligned} y_2(t) &= be^{-t}\cos 2t + ce^{-t}\sin 2t, \\ y_1(t) &= ae^t + \frac{1}{2}(b+c)e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}(c-b)e^{-t}\sin 2t. \end{aligned}$$

Pomocí počáteční podmínky určíme: $a = 0, b = 1, c = 1$. Hledané řešení má tedy tvar

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos 2t \\ e^{-t}\cos 2t + e^{-t}\sin 2t \\ e^{-t}\cos 2t + e^{-t}\sin 2t \end{pmatrix}.$$

4. Funkce f zúžená na interval $(-\pi, \pi)$ je lichá a na tomto intervalu je rostoucí a omezená. Odtud plyne $f \in BV([-\pi, \pi])$ a kosinové koeficienty jsou rovny nule. Sinové koeficienty vypočteme pomocí integrace per partes. Dostaneme

$$a_n = 0, \qquad b_n = -\frac{2}{\pi n^3}\left(-2(-1)^n + (-1)^n n^2\pi^2 + 2\right).$$

Fourierova řada konverguje na intervalu $(-\pi, \pi)$ lokálně stejnoměrně k f, protože funkce f je zde navíc spojitá (Jordan-Dirichletovo kritérium). V bodě $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, konverguje Fourierova řada k aritmetickému průměru jednostranných limit funkce f v tomto bodě, tj. konverguje k 0.