Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 2b (6)

LS 2009-10, 7. 9. 2010

---

1. Uvažujte diferenciální rovnici

$$y' = (x+3)\sqrt{y+1}.$$

- Nalezněte všechna maximální řešení rovnice.
- Nalezněte maximální řešení splňující podmínku $y(1) = 3$.

(15 bodů)

2. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + 2y'' = \sin x. \qquad \text{(15 bodů)}$$

3. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 + \cos t,\\ y_2' &= 4y_1 - y_2 + \sin t. \end{aligned}$$

Nalezněte maximální řešení uvedené soustavy, které vyhovuje počáteční podmínce $\boldsymbol{y}(0) = (1,0)^T$. (15 bodů)

4. Funkce f je definována na $[-\pi,\pi)$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [-\pi, -\pi/2),\\ x + \pi/2 & \text{pro } x \in [-\pi/2, 0),\\ -x + \pi/2 & \text{pro } x \in [0, \pi/2),\\ 0 & \text{pro } x \in [\pi/2, \pi) \end{cases}$$

a je dodefinována 2π-periodicky na celém $\mathbb{R}$. Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet této řady pro každé $x \in \mathbb{R}$. Svá tvrzení zdůvodněte. (15 bodů)