

3. VÝROKOVÁ A PREDIKÁTOVÁ LOGIKA, ZOBRAZENÍ

1. Ukažte, že bez ohledu na pravdivostní hodnotu výroků A, B, C jsou následující výroky vždy pravdivé.

- $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$
- $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

2. Necht' M je množina osob přítomných v posluchárně a necht' $W(x, y)$ znamená: osoba $x \in M$ zná příjmení osoby $y \in M$. Zkoumejte platnost následujících výroků.

$$\forall x \in M \exists y \in M: W(x, y)$$

$$\forall y \in M \exists x \in M: W(x, y)$$

$$\exists x \in M \forall y \in M: W(x, y)$$

$$\exists y \in M \forall x \in M: W(x, y)$$

3. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace pomocí postupu z přednášky.

$$\forall x \in \mathbf{R} \exists y \in \mathbf{R} \forall z \in \mathbf{R}: (z > y \Rightarrow z > x)$$

$$\forall a \in \mathbf{R} \exists \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbf{R} \forall x \in \mathbf{R}: (x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1)$$

$$\exists a \in \mathbf{R} \forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \forall \alpha \in \mathbf{R} \exists x \in \mathbf{R}: (x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1)$$

4. Necht' $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$. Určete $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{R}(f)$ a f^{-1} .

5. Necht' $f: X \rightarrow Y$ a $A \subset X, B \subset X$. Dokažte, že platí $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

6. Necht' $f: X \rightarrow Y$ a $A \subset Y, B \subset Y$. Dokažte následující rovnosti.

- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
- $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
- $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

7. Necht' $f: X \rightarrow Y$ a $A \subset X, B \subset X$. Ukažte, že následující vztahy obecně neplatí.

- $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,
- $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

8. Necht' A a B jsou množiny a necht' $f: A \rightarrow B$ je zobrazení. Dokažte následující tvrzení.

- Zobrazení f je prosté právě tehdy, když rovnice $f(x) = y$ má pro každé $y \in B$ nejvýše jedno řešení.
- Zobrazení f je „na“ právě tehdy, když rovnice $f(x) = y$ má pro každé $y \in B$ alespoň jedno řešení
- Zobrazení f je bijekce právě tehdy, když rovnice $f(x) = y$ má pro každé $y \in B$ právě jedno řešení.

9. Necht' $f: A \rightarrow C$ a $g: A \rightarrow B$ splňují $g(A) = B$. Najděte nutnou a postačující podmínku pro existenci zobrazení $h: B \rightarrow C$ splňujícího $f = h \circ g$.

10. Dokažte následující tvrzení.

- (a) Podmnožina spočetné množiny je spočetná.
- (b) Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.
- (c) Obraz spočetné množiny je spočetná množina.
- (d) Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.