Matematická analýza 1

ZS 2014-15

Miroslav Zelený

1. Logika, množiny, zobrazení a číselné obory
2. Limita posloupnosti
3. Číselné řady
4. Limita a spojitost funkce
5. Derivace a elementární funkce

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- cvičení,

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- cvičení,
- konzultace,

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- cvičení,
- konzultace,
- proseminář.

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- cvičení,
- konzultace,
- proseminář.

Podmínky

- udělení zápočtu,

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- cvičení,
- konzultace,
- proseminář.

Podmínky

- udělení zápočtu,
- složení zkoušky.

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- cvičení,
- konzultace,
- proseminář.

Podmínky

- udělení zápočtu,
- složení zkoušky.

1. Logika, množiny, zobrazení a číselné obory

1.1 Výroková a predikátová logika

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

1.1 Výroková a predikátová logika

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice

Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A.

1.1 Výroková a predikátová logika

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice

Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A.

A	$\neg A$
0	1

1.1 Výroková a predikátová logika

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice

Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A.

A	$\neg A$
0	1
1	0

1.1 Výroková a predikátová logika

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

$$\textit{Platí } A \textit{ i } B.$$

1.1 Výroková a predikátová logika

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0

1.1 Výroková a predikátová logika

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

$$\textit{Platí } A \textit{ i } B.$$

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

A	B	$A \vee B$
0	0	0

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1

1.1 Výroková a predikátová logika

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

1.1 Výroková a predikátová logika

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0

1.1 Výroková a predikátová logika

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

1.1 Výroková a predikátová logika

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**.

1.1 Výroková a predikátová logika

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**.

Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A.

1.1 Výroková a predikátová logika

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

1.1 Výroková a predikátová logika

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1

1.1 Výroková a predikátová logika

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(Platnost výroku) A je **nutnou a postačující** podmínkou (platnosti výroku) B.

1.1 Výroková a predikátová logika

Výrokovou formou budeme nazývat výraz

$$A(x_1, x_2, \ldots x_m),$$

z něhož vznikne výrok dosazením prvků $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_m \in M_m$ z daných množin $M_1, \ldots, M_m$.

Definice

Nyní nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

Pro všechna $x \in M$ *platí* $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M :\ A(x).$$

1.1 Výroková a predikátová logika

Definice

Nyní nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

$$\textit{Pro všechna } x \in M \textit{ platí } A(x).$$

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M :\ A(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným** (**velkým**) **kvantifikátorem**.

Definice

Nyní nechť $A(x), \ x \in M$, je výroková forma. Výrok

$$\textit{Existuje } x \in M, \textit{ pro které platí } A(x).$$

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M : \ A(x).$$

Definice

Nyní nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

$$\textit{Existuje } x \in M\textit{, pro které platí } A(x).$$

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M:\ A(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním (malým) kvantifikátorem**.

1.2 Množiny a množinové operace

Definice

- Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme $A \subset B$.

1.2 Množiny a množinové operace

Definice

- Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme $A \subset B$.
- Dvě množiny jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky.

1.2 Množiny a množinové operace

Definice

- Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme $A \subset B$.
- Dvě množiny jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky.
- **Prázdnou množinou** nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označíme ji symbolem $\emptyset$.

Definice

Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B.

Definice

Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B. Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Definice

Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B. Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.
Je-li $\mathcal{A}$ systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

Definice

Průnikem dvou množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$.

Definice

Průnikem dvou množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li dvě množiny prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Definice

Průnikem dvou množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li dvě množiny prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.
Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$.

Definice

- **Rozdílem množin** A a B (značíme $A \setminus B$) nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B.

Definice

- **Rozdílem množin** A a B (značíme $A \setminus B$) nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B.
- **Kartézským součinem** množin $A_1, \dots, A_n$ nazveme množinu všech uspořádaných n-tic

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{[a_1, a_2, \dots, a_n];\ a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Věta 1.1 (de Morganova pravidla)

Nechť X je množina a $\mathcal{A}$ je neprázdný systém množin. Pak platí

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}$$

a dále

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}.$$

1.3 Zobrazení

Definice

Nechť A a B jsou množiny. **Binární relací** mezi prvky množin A a B rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Nechť $R \subset A \times B$ je binární relace. Místo zápisu $[a, b] \in R$ někdy píšeme $a\,R\,b$. Pokud $A = B$ říkáme, že R je **relace na** A.

Definice

Nechť A a B jsou množiny a nechť $R \subset A \times B$ je binární relace. Pak relaci $R^{-1} \subset B \times A$ definovanou předpisem

$$[x, y] \in R^{-1} \Leftrightarrow [y, x] \in R$$

nazýváme **inverzní relací** k relaci R.

Definice

Nechť A a B jsou množiny. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme **zobrazením** (někdy též **funkcí**) z množiny A do množiny B, jestliže platí

$$\forall x \in A\ \forall y_1, y_2 \in B : \big(([x, y_1] \in F \wedge [x, y_2] \in F) \Rightarrow y_1 = y_2\big).$$

Definice

Nechť A a B jsou množiny. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme **zobrazením** (někdy též **funkcí**) z množiny A do množiny B, jestliže platí

$$\forall x \in A \; \forall y_1, y_2 \in B \colon \big(([x, y_1] \in F \wedge [x, y_2] \in F) \Rightarrow y_1 = y_2 \big).$$

Definičním oborem zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{D}(F) = \{x \in A;\ \exists y \in B \colon [x, y] \in F\}.$$

Definice

Nechť A a B jsou množiny. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme **zobrazením** (někdy též **funkcí**) z množiny A do množiny B, jestliže platí

$$\forall x \in A \; \forall y_1, y_2 \in B\colon \big(([x, y_1] \in F \wedge [x, y_2] \in F) \Rightarrow y_1 = y_2\big).$$

Definičním oborem zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{D}(F) = \{x \in A;\ \exists y \in B\colon [x, y] \in F\}.$$

Oborem hodnot zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{R}(F) = \{y \in B;\ \exists x \in A\colon [x, y] \in F\}.$$

Poznámka

Nechť F je zobrazení z množiny A do množiny B. Pro každé $x \in \mathcal{D}(F)$ existuje právě jedno y takové, že $[x, y] \in F$. Takové y značíme $F(x)$. **Grafem zobrazení** F rozumíme množinu $\{[x, F(x)];\ x \in \mathcal{D}(F)\}$.

Označení

Nechť A a B jsou množiny. Pak symbolem $F : A \to B$ značíme fakt, že

Označení

Nechť A a B jsou množiny. Pak symbolem $F : A \rightarrow B$ značíme fakt, že

- F je zobrazení z množiny A do množiny B,

Označení

Nechť A a B jsou množiny. Pak symbolem $F : A \to B$ značíme fakt, že

- F je zobrazení z množiny A do množiny B,
- A je definičním oborem F,

Označení

Nechť A a B jsou množiny. Pak symbolem $F: A \to B$ značíme fakt, že

- F je zobrazení z množiny A do množiny B,
- A je definičním oborem F,
- obor hodnot F je podmnožinou množiny B.

Definice

Nechť A, B jsou neprázdné množiny a $f: A \to B$.

- **Obrazem** množiny $X \subset A$ při zobrazení f se nazývá množina

$$f(X) = \{y \in B;\ \exists x \in X : f(x) = y\}$$

Definice

Nechť A, B jsou neprázdné množiny a $f : A \to B$.

- **Obrazem** množiny $X \subset A$ při zobrazení f se nazývá množina

$$f(X) = \{y \in B;\ \exists x \in X : f(x) = y\} = \{f(x);\ x \in X\}.$$

Definice

Nechť A, B jsou neprázdné množiny a $f : A \to B$.

- **Obrazem** množiny $X \subset A$ při zobrazení f se nazývá množina

$$f(X) = \{y \in B;\ \exists x \in X : f(x) = y\} = \{f(x);\ x \in X\}.$$

- **Vzorem** množiny $Y \subset B$ při zobrazení f nazveme množinu

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A;\ f(x) \in Y\}.$$

Definice

Nechť A a B jsou množiny a $f: A \to B$ je zobrazení.

(a) Řekneme, že f je **prosté** (**injektivní**), jestliže

$$\forall x, y \in A\colon (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y).$$

Definice

Nechť A a B jsou množiny a $f: A \to B$ je zobrazení.

(a) Řekneme, že f je **prosté** (**injektivní**), jestliže

$$\forall x, y \in A\colon (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y).$$

(b) Řekneme, že f je **na** (**surjektivní**), jestliže

$$\forall y \in B\ \exists x \in A\colon f(x) = y.$$

Definice

Nechť A a B jsou množiny a $f: A \to B$ je zobrazení.

(a) Řekneme, že f je **prosté (injektivní)**, jestliže

$$\forall x, y \in A\colon (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y).$$

(b) Řekneme, že f je **na (surjektivní)**, jestliže

$$\forall y \in B\ \exists x \in A\colon f(x) = y.$$

(c) Řekneme, že f je **bijekce (vzájemně jednoznačné)**, jestliže je zároveň prosté a na.

Definice

Nechť A a B jsou množiny, $f: A \to B$ je zobrazení a $C \subset A$. Pak zobrazení $g: C \to B$ definované předpisem $g(x) = f(x)$ pro $x \in C$ nazýváme **restrikcí (zúžením** nebo **parcializací**) zobrazení f na množinu C. Zobrazení g označujeme symbolem $f|_C$.

Definice

Nechť f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ taková, že $f(x) \in \mathcal{D}(g)$.

Definice

Nechť f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ taková, že $f(x) \in \mathcal{D}(g)$. Zobrazení $g \circ f$ nazýváme **složeným zobrazením** (**složením zobrazení**) f a g, přičemž g nazýváme **vnějším** zobrazením a f nazýváme **vnitřním** zobrazením.

Definice

Nechť A a B jsou množiny a $f : A \to B$ je prosté zobrazení. Pak **inverzní zobrazení** k f je definováno jako inverzní relace k f. Inverzní zobrazení k f značíme f^{-1}.

1.4 Mohutnost množin

Definice

- Říkáme, že množiny A, B **mají stejnou mohutnost** a píšeme $A \approx B$, jestliže existuje bijekce A na B.

1.4 Mohutnost množin

Definice

- Říkáme, že množiny A, B **mají stejnou mohutnost** a píšeme $A \approx B$, jestliže existuje bijekce A na B.
- Říkáme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B a píšeme $A \preceq B$, jestliže existuje prosté zobrazení A do B.

1.4 Mohutnost množin

Definice

- Říkáme, že množiny A, B **mají stejnou mohutnost** a píšeme $A \approx B$, jestliže existuje bijekce A na B.
- Říkáme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B a píšeme $A \preceq B$, jestliže existuje prosté zobrazení A do B.
- Symbol $A \prec B$ značí situaci, kdy $A \preceq B$ a neplatí $A \approx B$.

Definice

Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1, \ldots, n\}$.

Definice

Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1, \ldots, n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, pokud není konečná.

Definice

Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1, \ldots, n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, pokud není konečná. Řekneme, že množina X je **spočetná**, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbf{N}$.

Definice

Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1, \ldots, n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, pokud není konečná. Řekneme, že množina X je **spočetná**, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbf{N}$. Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Definice

Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1, \ldots, n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, pokud není konečná. Řekneme, že množina X je **spočetná**, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbf{N}$. Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Poznámka

Pro počet prvků konečné množiny X používáme často značení $|X|$. Dvě konečné množiny X, Y mají stejnou mohutnost právě tehdy, když $|X| = |Y|$.

Věta 1.2 (Cantor–Bernstein)

Nechť A, B jsou množiny takové, že $A \preceq B$ a zároveň $B \preceq A$. Pak A a B mají stejnou mohutnost.

Definice

Nechť X je množina. Potom **potenční množinou** množiny X rozumíme množinu $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin množiny X.

Definice

Nechť X je množina. Potom **potenční množinou** množiny X rozumíme množinu $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin množiny X.

Věta 1.3 (Cantor)

Nechť X je množina. Pak $X \prec P(X)$.

Věta 1.4 (vlastnosti spočetných množin)

(a) *Podmnožina spočetné množiny je spočetná.*

Věta 1.4 (vlastnosti spočetných množin)

(a) *Podmnožina spočetné množiny je spočetná.*

(b) *Nechť zobrazení* $f : A \to \mathbf{N}$ *je prosté. Potom je množina* A *spočetná.*

Věta 1.4 (vlastnosti spočetných množin)

(a) *Podmnožina spočetné množiny je spočetná.*

(b) *Nechť zobrazení $f : A \to \mathbf{N}$ je prosté. Potom je množina A spočetná.*

(c) *Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.*

Věta 1.4 (vlastnosti spočetných množin)

(a) *Podmnožina spočetné množiny je spočetná.*

(b) *Nechť zobrazení $f : A \to \mathbf{N}$ je prosté. Potom je množina A spočetná.*

(c) *Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.*

(d) *Obraz spočetné množiny je spočetná množina.*

Věta 1.4 (vlastnosti spočetných množin)

(a) *Podmnožina spočetné množiny je spočetná.*

(b) *Nechť zobrazení* $f : A \to \mathbf{N}$ *je prosté. Potom je množina* A *spočetná.*

(c) *Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.*

(d) *Obraz spočetné množiny je spočetná množina.*

(e) *Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.*

1.5 Reálná čísla

Množinu reálných čísel **R** lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

1.5 Reálná čísla

Množinu reálných čísel **R** lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah
II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení
III. Axiom suprema

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \; x + (y + z) = (x + y) + z$ **(asociativita sčítání)**,

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \; x + (y + z) = (x + y) + z$ (**asociativita sčítání**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \; x + y = y + x$ (**komutativita sčítání**),

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ x + (y + z) = (x + y) + z$ (**asociativita sčítání**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ x + y = y + x$ (**komutativita sčítání**),
- $\exists w \in \mathbf{R}\ \forall x \in \mathbf{R}: \ w + x = x$ (prvek w je určen jednoznačně, značíme ho 0 a říkáme mu **nulový prvek**),

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ x + (y + z) = (x + y) + z$ (**asociativita sčítání**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ x + y = y + x$ (**komutativita sčítání**),
- $\exists w \in \mathbf{R} \ \forall x \in \mathbf{R}: \ w + x = x$ (prvek w je určen jednoznačně, značíme ho 0 a říkáme mu **nulový prvek**),
- $\forall x \in \mathbf{R} \ \exists z \in \mathbf{R}: \ x + z = 0$ (z je tzv. **opačné číslo** k číslu x, je určeno jednoznačně a značíme ho $-x$),

1.5 Reálná čísla

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \; x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),

1.5 Reálná čísla

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \; x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \; x \cdot y = y \cdot x$ (**komutativita násobení**),

1.5 Reálná čísla

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \; x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \; x \cdot y = y \cdot x$ (**komutativita násobení**),
- $\exists v \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \; \forall x \in \mathbf{R}: \; v \cdot x = x$ (prvek v je určen jednoznačně, značíme ho 1 a říkáme mu **jednotkový prvek**),

1.5 Reálná čísla

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ x \cdot y = y \cdot x$ (**komutativita násobení**),
- $\exists v \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \ \forall x \in \mathbf{R}: \ v \cdot x = x$ (prvek v je určen jednoznačně, značíme ho 1 a říkáme mu **jednotkový prvek**),
- $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \ \exists y \in \mathbf{R}: \ x \cdot y = 1$ (prvek y je určen jednoznačně a značíme ho x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),

1.5 Reálná čísla

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \; x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \; x \cdot y = y \cdot x$ (**komutativita násobení**),
- $\exists v \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \; \forall x \in \mathbf{R}: \; v \cdot x = x$ (prvek v je určen jednoznačně, značíme ho 1 a říkáme mu **jednotkový prvek**),
- $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \; \exists y \in \mathbf{R}: \; x \cdot y = 1$ (prvek y je určen jednoznačně a značíme ho x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \; (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (**distributivita**).

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \wedge \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ **(tranzitivita)**,

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \wedge \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ **(tranzitivita)**,
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \wedge \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ **(slabá antisymetrie)**,

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \wedge \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ **(tranzitivita)**,
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \wedge \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ **(slabá antisymetrie)**,
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ x \leq y \vee y \leq x$,

1.5 Reálná čísla

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \wedge \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ **(tranzitivita)**,
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \wedge \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ **(slabá antisymetrie)**,
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ x \leq y \vee y \leq x$,
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \wedge \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ **(tranzitivita)**,
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \wedge \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ **(slabá antisymetrie)**,
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ x \leq y \vee y \leq x$,
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ (0 \leq x \ \wedge \ 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$.

Označení

- Označení $x \geq y$ znamená totéž co $y \leq x$.

Označení

- Označení $x \geq y$ znamená totéž co $y \leq x$. Symbolem $x < y$ budeme značit situaci, kdy $x \leq y$, ale $x \neq y$ (tzv. **ostrá nerovnost**).

1.5 Reálná čísla

Označení

- Označení $x \geq y$ znamená totéž co $y \leq x$. Symbolem $x < y$ budeme značit situaci, kdy $x \leq y$, ale $x \neq y$ (tzv. **ostrá nerovnost**).
- Reálná čísla, pro něž $x > 0$ (resp. $x < 0$), budeme nazývat **kladnými** (resp. **zápornými**).

1.5 Reálná čísla

Označení

- Označení $x \geq y$ znamená totéž co $y \leq x$. Symbolem $x < y$ budeme značit situaci, kdy $x \leq y$, ale $x \neq y$ (tzv. **ostrá nerovnost**).
- Reálná čísla, pro něž $x > 0$ (resp. $x < 0$), budeme nazývat **kladnými** (resp. **zápornými**).
- Reálná čísla, pro něž $x \geq 0$ (resp. $x \leq 0$), budeme nazývat **nezápornými** (resp. **nekladnými**).

Definice

- Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená zdola**, jestliže existuje číslo $a \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$.

1.5 Reálná čísla

Definice

- Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená zdola**, jestliže existuje číslo $a \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$.
  Takové číslo a se nazývá **dolní závorou** množiny M.

1.5 Reálná čísla

Definice

- Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená zdola**, jestliže existuje číslo $a \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$.
  Takové číslo a se nazývá **dolní závorou** množiny M.
- Analogicky definujeme pojmy **množina omezená shora** a **horní závora**.

1.5 Reálná čísla

Definice

- Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená zdola**, jestliže existuje číslo $a \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$.
  Takové číslo a se nazývá **dolní závorou** množiny M.
- Analogicky definujeme pojmy **množina omezená shora** a **horní závora**.
- Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Číslo $G \in \mathbf{R}$ splňující

- $\forall x \in M: \ x \leq G$,
- $\forall G' \in \mathbf{R}, G' < G \, \exists x \in M: \ x > G'$,

nazýváme **supremem** množiny M.

1.5 Reálná čísla

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Číslo $G \in \mathbf{R}$ splňující

- $\forall x \in M : \; x \leq G$,
- $\forall G' \in \mathbf{R}, G' < G \; \exists x \in M : \; x > G'$,

nazýváme **supremem** množiny M.

Poznámka

Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Má-li množina M supremum, je toto určeno jednoznačně a značíme jej $\sup M$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **největší prvek** (**maximum**) množiny M, jestliže $a \in M$ a a je horní závorou množiny M.

1.5 Reálná čísla

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **největší prvek** (**maximum**) množiny M, jestliže $a \in M$ a a je horní závorou množiny M. Analogicky definujeme **nejmenší prvek** (**minimum**) M.

1.5 Reálná čísla

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **největší prvek** (**maximum**) množiny M, jestliže $a \in M$ a a je horní závorou množiny M. Analogicky definujeme **nejmenší prvek** (**minimum**) M. Maximum a minimum jsou určeny jednoznačně (pokud existují) a značíme je $\max M$ a $\min M$.

1.5 Reálná čísla

III. Axiom suprema

- Každá neprázdná shora omezená podmnožina **R** má supremum.

1.5 Reálná čísla

Věta 1.5

Existuje čtveřice $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ *splňující podmínky I–III, přičemž je těmito podmínkami určena jednoznačně v následujícím smyslu. Pokud čtveřice* $(\tilde{\mathbf{R}}, \oplus, \odot, \leq^*)$ *splňuje mutatis mutandis podmínky I–III, pak existuje bijekce* $\varphi : \mathbf{R} \to \tilde{\mathbf{R}}$ *taková, že pro každé* $x, y \in \mathbf{R}$ *platí*

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$,
- $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$,
- $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq^* \varphi(y)$.

1.5 Reálná čísla

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Číslo $g \in \mathbf{R}$ splňující

- $\forall x \in M : \; x \geq g$,
- $\forall g' \in \mathbf{R}, \; g' > g \; \exists x \in M : \; x < g'$,

nazýváme **infimem** množiny M.

1.5 Reálná čísla

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Číslo $g \in \mathbf{R}$ splňující

- $\forall x \in M : \; x \geq g$,
- $\forall g' \in \mathbf{R}, \; g' > g \; \exists x \in M : \; x < g'$,

nazýváme **infimem** množiny M.

Poznámka

Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Má-li množina M infimum, je toto určeno jednoznačně a značíme jej $\inf M$.

1.5 Reálná čísla

Věta 1.6

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje infimum množiny M.

1.5 Reálná čísla

Věta 1.7

Pro každé $r \in \mathbf{R}$ *existuje právě jedno číslo* $k \in \mathbf{Z}$ *takové, že* $k \leq r < k + 1$.

1.5 Reálná čísla

Věta 1.7

Pro každé $r \in \mathbf{R}$ existuje právě jedno číslo $k \in \mathbf{Z}$ takové, že $k \leq r < k + 1$.

Věta 1.8

Ke každému $x \in \mathbf{R}$ existuje $n \in \mathbf{N}$ splňující $x < n$.

Věta 1.9

Pro každé $n \in \mathbf{N}$ *a* $x \in \mathbf{R}$, $x \geq 0$, *existuje právě jedno* $y \in \mathbf{R}$, $y \geq 0$, *splňující* $y^n = x$.

Věta 1.9

Pro každé $n \in \mathbf{N}$ *a* $x \in \mathbf{R}$, $x \geq 0$, *existuje právě jedno* $y \in \mathbf{R}$, $y \geq 0$, *splňující* $y^n = x$.

Věta 1.10

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. *Pak existuje* $q \in \mathbf{Q}$ *takové, že* $a < q < b$.

1.6 Komplexní čísla

Množinu komplexních čísel C definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic (a, b), kde $a, b \in \mathbf{R}$, přičemž pro komplexní čísla $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ definujeme operace **sčítání** a **násobení** takto

- $x + y = (a + c, b + d)$,
- $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$.

1.6 Komplexní čísla

Nechť $x = (a, b) \in \mathbf{C}$. Prvek a nazýváme **reálnou částí** x, prvek b nazýváme **imaginární částí** x.

1.6 Komplexní čísla

Nechť $x = (a, b) \in \mathbf{C}$. Prvek a nazýváme **reálnou částí** x, prvek b nazýváme **imaginární částí** x. **Absolutní hodnotou** komplexního čísla x rozumíme $\sqrt{a^2 + b^2}$.

1.6 Komplexní čísla

Nechť $x = (a, b) \in \mathbf{C}$. Prvek a nazýváme **reálnou částí** x, prvek b nazýváme **imaginární částí** x. **Absolutní hodnotou** komplexního čísla x rozumíme $\sqrt{a^2 + b^2}$. Dále definujeme $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$ (sic!) a $i = (0, 1)$.

1.6 Komplexní čísla

Nechť $x = (a, b) \in \mathbf{C}$. Prvek a nazýváme **reálnou částí** x, prvek b nazýváme **imaginární částí** x. **Absolutní hodnotou** komplexního čísla x rozumíme $\sqrt{a^2 + b^2}$. Dále definujeme $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$ (sic!) a $i = (0, 1)$. **Komplexně sdruženým číslem** k x rozumíme číslo $\overline{x} = (a, -b)$; symbol $-x$ značí číslo $(-a, -b)$ a symbol $1/x$ značí pro $x \neq 0$ (jednoznačně určené) číslo splňující $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

2. Limita posloupnosti

2.1 Úvod

Definice

Zobrazení přiřazující každému přirozenému číslu n reálné číslo a_n nazýváme **posloupnost** reálných čísel. Značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2.1 Úvod

Definice

Zobrazení přiřazující každému přirozenému číslu n reálné číslo a_n nazýváme **posloupnost** reálných čísel. Značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Číslo a_n nazveme ***n*-tým členem** této posloupnosti.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \le a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

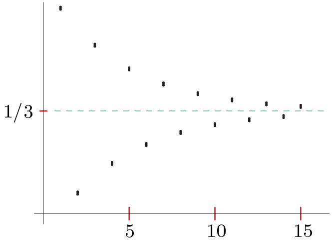
Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, pokud je rostoucí či klesající.

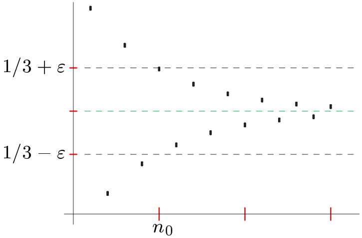
2.2 Konvergence posloupnosti

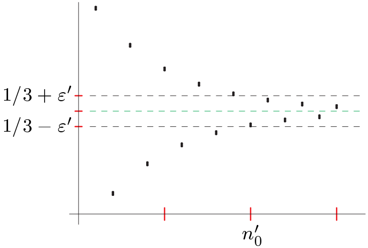
Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má **limitu** rovnou reálnému číslu A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbf{N} \; \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; |a_n - A| < \varepsilon.$$


1/3
5
10
15


$1/3 + \varepsilon$
$1/3 - \varepsilon$
n_0


$1/3 + \varepsilon'$
$1/3 - \varepsilon'$
n_0'

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Definice

Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu rovnou číslu $A \in \mathbf{R}$, pak píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$.

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Definice

Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu rovnou číslu $A \in \mathbf{R}$, pak píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **konvergentní**, pokud existuje $A \in \mathbf{R}$ takové, že $\lim a_n = A$.

Věta 2.2

Nechť $K \in \mathbf{R}$, $K > 0$, $A \in \mathbf{R}$. *Jestliže posloupnost* $\{a_n\}$ *splňuje podmínku*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ |a_n - A| < K\varepsilon.$$

potom $\lim a_n = A$.

Věta 2.3

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Věta 2.3

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá **vybranou posloupností z** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*. Jestliže platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$*, pak také* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$*.*

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*. Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(c) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$, *je* $\lim(a_n / b_n) = A/B$.

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(c) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$, *je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(c) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$, *je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(c) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$, *je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Věta 2.6

Nechť $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená. Potom* $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 2.7

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$. *Potom* $\lim |a_n| = |A|$.

Věta 2.8 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*.*

Věta 2.8 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$.

(a) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

Věta 2.8 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$.

(a) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

(b) *Nechť* $A < B$. *Potom existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$.

Věta 2.8 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*.*

(a) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$*. Potom* $A \geq B$*.*

(b) *Nechť* $A < B$*. Potom existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$*.*

Věta 2.8 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*.*

(a) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$*. Potom* $A \geq B$*.*

(b) *Nechť* $A < B$*. Potom existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$*.*

Věta 2.9 (o dvou strážnících)

Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *jsou dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *je posloupnost splňující:*

(a) $\exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \leq c_n \leq b_n,$

Věta 2.9 (o dvou strážnících)

Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *jsou dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *je posloupnost splňující:*

(a) $\exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \leq c_n \leq b_n$,

(b) $\lim a_n = \lim b_n$.

Věta 2.9 (o dvou strážnících)

Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *jsou dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *je posloupnost splňující:*

(a) $\exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \leq c_n \leq b_n$,

(b) $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom existuje $\lim c_n$ *a platí* $\lim c_n = \lim a_n$.

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu ∞, jestliže

$$\forall L \in \mathbf{R}\, \exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \geq L.$$

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu ∞, jestliže

$$\forall L \in \mathbf{R}\, \exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \geq L.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$, jestliže

$$\forall K \in \mathbf{R}\, \exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \leq K.$$

Věta 2.10 (jednoznačnost limity podruhé)

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu v $\mathbf{R}^\star$.

Věta 2.11 (aritmetika limit podruhé)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^\star$*.*

Věta 2.11 (aritmetika limit podruhé)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^\star$*. Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$*, pokud je pravá strana definována,*

Věta 2.11 (aritmetika limit podruhé)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^\star$*. Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$*, pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$*, pokud je pravá strana definována,*

Věta 2.11 (aritmetika limit podruhé)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^\star$*. Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$*, pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$*, pokud je pravá strana definována,*

(iii) $\lim a_n / b_n = A/B$*, pokud je pravá strana definována.*

Věta 2.12

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$, $A > 0$, $\lim b_n = 0$ *a existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$*, že pro každé* $n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0$*, platí* $b_n > 0$*. Pak* $\lim a_n/b_n = \infty$*.*

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^{\star}$. Číslo $G \in \mathbf{R}^{\star}$ splňující

- $\forall x \in M: \ x \leq G$,
- $\forall G' \in \mathbf{R}^{\star}, G' < G \, \exists x \in M : x > G'$,

nazýváme **supremem** množiny M. **Infimum** množiny M definujeme analogicky.

Věta 2.13

Každá monotónní posloupnost má limitu.

Věta 2.13

Každá monotónní posloupnost má limitu.

Věta 2.14 (Cantorův princip vložených intervalů)

Nechť $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost uzavřených intervalů splňující:*

Věta 2.13

Každá monotónní posloupnost má limitu.

Věta 2.14 (Cantorův princip vložených intervalů)

Nechť $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost uzavřených intervalů splňující:*

- $\forall n \in \mathbf{N} : \; I_{n+1} \subset I_n$,
- $\lim_{n\to\infty} \text{délka}\, I_n = 0$.

Věta 2.13

Každá monotónní posloupnost má limitu.

Věta 2.14 (Cantorův princip vložených intervalů)

Nechť $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost uzavřených intervalů splňující:*

- $\forall n \in \mathbf{N}: \ I_{n+1} \subset I_n$,
- $\lim_{n\to\infty}$ *délka* $I_n = 0$.

Potom $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ *je jednobodová množina.*

Věta 2.15 (Bolzanova-Weierstrassova věta)

Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k;\ k \geq n\}, & \text{jestliže je } \{a_n\} \text{ shora omezená,} \\ \infty, & \text{jestliže není } \{a_n\} \text{ shora omezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}$.

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k;\ k \geq n\}, & \text{jestliže je } \{a_n\} \\ & \text{shora omezená,} \\ \infty, & \text{jestliže není } \{a_n\} \\ & \text{shora omezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}$. Obdobně definujeme **limes inferior** posloupnosti $\{a_n\}$ předpisem

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k;\ k \geq n\}, & \text{jestliže je } \{a_n\} \\ & \text{zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{jestliže není } \{a_n\} \\ & \text{zdola omezená.} \end{cases}$$

Věta 2.16 (o vztahu limity, limes superior a limes inferior)

Nechť $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel a* $A \in \mathbf{R}^*$. *Potom* $\lim a_n = A$ *právě tehdy, když* $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.

Věta 2.17

Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti reálných čísel,* $n_0 \in \mathbf{N}$ *a platí* $a_n \leq b_n$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. *Pak platí*

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n \text{ a } \limsup a_n \leq \limsup b_n .$$

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbf{R}^*$. Řekneme, že A je **hromadná hodnota** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H(\{a_n\})$.

Věta 2.18 (o vztahu limes superior, limes inferior a hromadných hodnot)

Nechť $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel. Potom* $\limsup a_n$ *a* $\liminf a_n$ *jsou hromadnými hodnotami posloupnosti* $\{a_n\}$ *a pro každou hromadnou hodnotu* A *posloupnosti* $\{a_n\}$ *platí* $\liminf a_n \leq A \leq \limsup a_n$.

Věta 2.18 (o vztahu limes superior, limes inferior a hromadných hodnot)

Nechť $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel. Potom* $\limsup a_n$ *a* $\liminf a_n$ *jsou hromadnými hodnotami posloupnosti* $\{a_n\}$ *a pro každou hromadnou hodnotu* A *posloupnosti* $\{a_n\}$ *platí* $\liminf a_n \leq A \leq \limsup a_n$.

Důsledek 2.19

Nechť $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel a nechť* $A \in \mathbf{R}^*$. *Je-li* $\lim a_n = A$, *pak* $H(\{a_n\}) = \{A\}$.

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ splňuje **Bolzanovu–Cauchyovu podmínku**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall m, n \in \mathbf{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ splňuje **Bolzanovu–Cauchyovu podmínku**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N}$$
$$\forall m, n \in \mathbf{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Věta 2.20

Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku.

Věta 2.21 (Borelova věta)

Nechť I je uzavřený interval a $\mathcal{S}$ je množina otevřených intervalů taková, že $I \subset \bigcup \mathcal{S}$. Potom existuje konečná množina $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ taková, že $I \subset \bigcup \mathcal{S}_0$.

3. Číselné řady

3. Číselné řady

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme *m*-**tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. Číselné řady

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme m**-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat n**-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. Číselné řady

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme m**-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat n**-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje.

3. Číselné řady

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme ***m*-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat ***n*-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. Číselné řady

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme ***m*-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat ***n*-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada **konverguje**, je-li její součet reálné číslo. V opačném případě řekneme, že řada **diverguje**.

3. Číselné řady

Věta 3.1 (nutná podmínka konvergence řady)

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak* $\lim a_n = 0$.

Věta 3.2

(i) *Nechť* $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ *konverguje.*

(ii) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou konvergentní řady. Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *konverguje.*

(iii) *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když platí*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0$$

$$\forall m \in \mathbf{N}, m > n : \left| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \right| < \varepsilon.$$

Věta 3.3 (srovnávací kritérium)

Nechť $n_0 \in \mathbf{N}$. *Dále nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou dvě řady splňující* $0 \leq a_n \leq b_n$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$.

(i) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

Věta 3.3 (srovnávací kritérium)

Nechť $n_0 \in \mathbf{N}$. *Dále nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou dvě řady splňující* $0 \leq a_n \leq b_n$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$.

(i) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(ii) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergentní.*

Věta 3.4 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a* $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c \in \mathbf{R}^\star$.

(i) *Nechť* $c \in (0,\infty)$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když konverguje* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ii) *Nechť* $c = 0$. *Pak konverguje-li* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *konverguje i* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(iii) *Nechť* $c = \infty$. *Pak konverguje-li* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *konverguje i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 3.5 (Cauchyovo odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Potom platí:*

(i) *Existuje-li* $q \in (0, 1)$ *takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ \sqrt[n]{a_n} < q\,,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) *Je-li* $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iii) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

Věta 3.5 (Cauchyovo odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Potom platí:*

(i) *Existuje-li* $q \in (0,1)$ *takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ \sqrt[n]{a_n} < q,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) *Je-li* $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iii) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iv) *Je-li* $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, *pak neplatí* $\lim a_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní.*

(v) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, *pak neplatí* $\lim a_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní.*

Věta 3.6 (d'Alembertovo podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

(i) *Existuje-li* $q \in (0,1)$ *takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < q,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) *Je-li* $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$*, pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iii) *Je-li* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$*, pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iv) *Je-li* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$*, pak neplatí* $\lim a_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní.*

Věta 3.7 (Raabeovo kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

(i) *Je-li* $\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(ii) *Je-li* $\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Věta 3.8

Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$. *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ *konverguje právě tehdy, když* $\alpha > 1$.

Věta 3.8

Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$*. Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ *konverguje právě tehdy, když* $\alpha > 1$*.*

Věta 3.9 (kondenzační kritérium)

Nechť $\{a_n\}$ *je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje právě tehdy, když konverguje řada* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$*.*

Lemma 3.10 (Abelova parciální sumace)

Nechť $m \in \mathbf{N}$ *a* $a_1, \dots, a_m$, $b_1, \dots, b_m$ *jsou reálná čísla.*

(a) *Nechť* $n \in \mathbf{N}$, $n \leq m$, *a* $\sigma_k = \sum_{j=n}^{k} a_j$, $k = n, \dots, m$. *Pak platí*

$$\sum_{j=n}^{m} a_j b_j = \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) + \sigma_m b_m.$$

Lemma 3.10 (Abelova parciální sumace)

Nechť $m \in \mathbf{N}$ a $a_1, \dots, a_m$, $b_1, \dots, b_m$ jsou reálná čísla.

(a) *Nechť $n \in \mathbf{N}$, $n \leq m$, a $\sigma_k = \sum_{j=n}^{k} a_j$, $k = n, \dots, m$. Pak platí*

$$\sum_{j=n}^{m} a_j b_j = \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) + \sigma_m b_m.$$

(b) *Označme $s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$, $k = 0, \dots, m$. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$, $n \leq m$, platí*

$$\sum_{j=n}^{m} a_j b_j = -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m.$$

Věta 3.11 (Abelovo-Dirichletovo kritérium)

Nechť $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti, přičemž* $\{b_n\}$ *je monotónní. Nechť je navíc splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:*

(A) *posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená a řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*

Věta 3.11 (Abelovo-Dirichletovo kritérium)

Nechť $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti, přičemž* $\{b_n\}$ *je monotónní. Nechť je navíc splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:*

(A) *posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená a řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*

(D) $\lim b_n = 0$ *a posloupnost částečných součtů řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je omezená.*

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

Věta 3.12 (Leibniz)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je monotónní posloupnost, která konverguje k* 0*. Pak řada řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *konverguje.*

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

3.4 Absolutní konvergence

Definice

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, ale není absolutně konvergentní, říkáme, že je **neabsolutně konvergentní**.

Věta 3.13

Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní, je rovněž konvergentní.*

4. Limita a spojitost funkce

4. Limita a spojitost funkce

Definice

Funkce f **jedné reálné proměnné** (dále jen **funkce**) je zobrazení $f : M \to \mathbf{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

4. Limita a spojitost funkce

Definice

Funkce f **jedné reálné proměnné** (dále jen **funkce**) je zobrazení $f : M \to \mathbf{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice

Funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je **rostoucí** na intervalu J, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J,\ x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Analogicky definujeme funkci **klesající** (**neklesající**, **nerostoucí**) na intervalu J.

Definice

Monotónní funkcí (resp. **ryze monotónní funkcí**) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na J.

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická s periodou** $a \in \mathbf{R},\ a > 0$, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $x + a \in D_f,\ x - a \in D_f$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická s periodou** $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $x + a \in D_f$, $x - a \in D_f$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$,
- **shora omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,

- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,

- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- **omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,

- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- **omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,
- **konstantní** na M, jestliže pro všechna $x, y \in M$ platí $f(x) = f(y)$.

4.2 Limita funkce

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
- **prstencové okolí bodu** c jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$,

4.2 Limita funkce

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
- **prstencové okolí bodu** c jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$,

Okolí a prstencové okolí bodu ∞ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

$$P(\infty, \varepsilon) = B(\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, \infty),$$
$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

Definice

Řekneme, že číslo $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce** f **v bodě** $c \in \mathbf{R}^\star$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \; \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Definice

Řekneme, že číslo $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce** f **v bodě** $c \in \mathbf{R}^\star$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \; \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

To označujeme symbolem $\lim_{x \to c} f(x) = A$.

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B^+(c, \varepsilon) = [c, c + \varepsilon)$,

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B^+(c, \varepsilon) = [c, c + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c]$,

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B^+(c, \varepsilon) = [c, c + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c]$,
- **pravé prstencové okolí bodu** c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B^+(c, \varepsilon) = [c, c + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c]$,
- **pravé prstencové okolí bodu** c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** c jako $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$.

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** ∞ jako $B^-(\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, \infty)$,

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** ∞ jako $B^{-}(\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, \infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B^{+}(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** ∞ jako $B^-(\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, \infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B^+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** ∞ jako $P^-(\infty, \varepsilon) = B^-(\infty, \varepsilon)$,

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** ∞ jako $B^-(\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, \infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B^+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** ∞ jako $P^-(\infty, \varepsilon) = B^-(\infty, \varepsilon)$,
- **pravé prstencové okolí bodu** $-\infty$ jako $P^+(-\infty, \varepsilon) = B^+(-\infty, \varepsilon)$.

Definice

Nechť $A \in \mathbf{R}^{\star}$, $c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A (značíme $\lim_{x \to c+} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P^{+}(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Definice

Nechť $A \in \mathbf{R}^{\star}$, $c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A (značíme $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P^{+}(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$.

Definice

Nechť $A \in \mathbf{R}^\star$, $c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A (značíme $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\, \forall x \in P^+(c, \delta) : f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Pro limitu zleva funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$.

Definice

Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** c, jestliže $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Definice

Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** c, jestliže $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá zprava** (resp. **zleva**), jestliže $\lim_{x \to c+} f(x) = f(c)$ (resp. $\lim_{x \to c-} f(x) = f(c)$).

Definice

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,

Definice

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,

Definice

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá v každém vnitřním bodě J.

4.3 Věty o limitách

Věta 4.1

Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

4.3 Věty o limitách

Věta 4.1

Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

Věta 4.2

Nechť funkce f má vlastní limitu v bodě $c \in \mathbf{R}^{\star}$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že f je na $P(c, \delta)$ omezená.

Věta 4.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

Věta 4.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

Věta 4.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x \to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x \to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x \to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

Věta 4.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^{\star}$. *Nechť* $\lim_{x \to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^{\star}$ *a* $\lim_{x \to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^{\star}$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x \to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x \to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

Věta 4.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

Věta 4.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

Věta 4.3 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

Věta 4.4

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $A > 0$. *Jestliže existuje* $\eta > 0$ *takové, že funkce* g *je kladná na* $P(c, \eta)$, *pak* $\lim_{x\to c}(f(x)/g(x)) = \infty$.

Věta 4.5 (limita funkce a uspořádání)

Mějme $c \in \mathbf{R}^\star$.

(i) *Nechť*

$$\lim_{x \to c} f(x) > \lim_{x \to c} g(x).$$

Pak existuje prstencové okolí $P(c, \delta)$ *takové, že platí*

$$\forall x \in P(c, \delta) : \; f(x) > g(x).$$

(ii) Nechť existuje prstencové okolí $P(c, \delta)$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta) : \; f(x) \leq g(x).$$

Nechť existují $\lim_{x \to c} f(x)$ a $\lim_{x \to c} g(x)$. Potom platí

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x).$$

(iii) (o dvou strážnících) Nechť na nějakém prstencovém okolí $P(c, \delta)$ platí

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$. Potom existuje rovněž $\lim_{x\to c} h(x)$ a všechny tři limity jsou si rovny.

Věta 4.6

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x \to c} g(x) = D$, $\lim_{y \to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

Věta 4.6

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0\, \forall x \in P(c,\eta):\ g(x) \neq D$,

Věta 4.6

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^{\star}$, $\lim_{x \to c} g(x) = D$, $\lim_{y \to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0 \, \forall x \in P(c, \eta) : \; g(x) \neq D$,

(S) f *je spojitá v* D.

Věta 4.6

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0\, \forall x \in P(c,\eta): \ g(x) \neq D$,

(S) f *je spojitá v* D.

Potom $\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = A$.

Věta 4.6

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^{\star}$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0\, \forall x \in P(c,\eta): \; g(x) \neq D$,

(S) f *je spojitá v* D.

Potom $\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = A$.

Věta 4.6

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0\, \forall x \in P(c,\eta):\ g(x) \neq D$,

(S) *f je spojitá v D.*

Potom $\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = A$.

Věta 4.7 (Heine)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$, $A \in \mathbf{R}^\star$ *a funkce* f *je definována na prstencovém okolí bodu* c. *Pak jsou výroky* (i) *a* (ii) *ekvivalentní.*

(i) *Platí* $\lim_{x \to c} f(x) = A$.

(ii) *Pro každou posloupnost* $\{x_n\}$ *splňující* $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq c$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$ *a* $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, *platí* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Věta 4.8 (limita monotónní funkce)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, *a funkce* f *je monotónní na intervalu* (a, b). *Potom existují* $\lim_{x\to a_+} f(x)$ *a* $\lim_{x\to b_-} f(x)$, *přičemž platí:*

(a) *Je-li* f *na* (a, b) *neklesající, pak*

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \inf f\big((a,b)\big) \quad a \quad \lim_{x\to b_-} f(x) = \sup f\big((a,b)\big).$$

Věta 4.8 (limita monotónní funkce)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, *a funkce* f *je monotónní na intervalu* (a, b). *Potom existují* $\lim_{x\to a_+} f(x)$ *a* $\lim_{x\to b_-} f(x)$, *přičemž platí:*

(a) *Je-li* f *na* (a, b) *neklesající, pak*

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \inf f\big((a, b)\big) \quad a \quad \lim_{x\to b_-} f(x) = \sup f\big((a, b)\big).$$

(b) *Je-li* f *na* (a, b) *nerostoucí, pak*

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \sup f\big((a, b)\big) \quad a \quad \lim_{x\to b_-} f(x) = \inf f\big((a, b)\big).$$

4.4 Funkce spojité na intervalu

Věta 4.9 (Bolzano)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a předpokládejme, že $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f(\xi) = C$.

Lemma 4.10

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ a platí

$$\forall x, y \in M \, \forall z \in \mathbf{R}: \; x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

Lemma 4.10

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ *a platí*

$$\forall x, y \in M \, \forall z \in \mathbf{R} : \; x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

Pak M *je interval.*

Lemma 4.10

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ *a platí*

$$\forall x, y \in M \, \forall z \in \mathbf{R} : \; x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

Pak M *je interval.*

Věta 4.11 (zobrazení intervalu spojitou funkcí)

Nechť J *je nedegenerovaný interval. Nechť funkce* $f : J \to \mathbf{R}$ *je spojitá na* J*. Potom je* $f(J)$ *interval.*

Věta 4.12

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom je f na $[a, b]$ omezená.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$).

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M \colon f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M \colon f(y) \geq f(x)).$$

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M : f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M : f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce f na množině M.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce f na množině M. Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$).

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$).Řekneme, že funkce f má v bodě x

- **lokální maximum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M$: $f(y) \leq f(x)$,

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$).Řekneme, že funkce f má v bodě x

- **lokální maximum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M : f(y) \leq f(x)$,
- **lokální minimum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M : f(y) \geq f(x)$,

Věta 4.13

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$, kde $a, b \in \mathbf{R}, a < b$. Potom funkce f nabývá na $[a, b]$ své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).

Věta 4.13

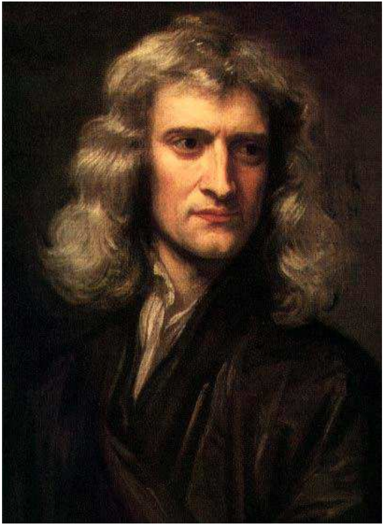
Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a,b]$, kde $a,b \in \mathbf{R}, a < b$. Potom funkce f nabývá na $[a,b]$ své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).

Věta 4.14 (o inverzní funkci)

Nechť f spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.

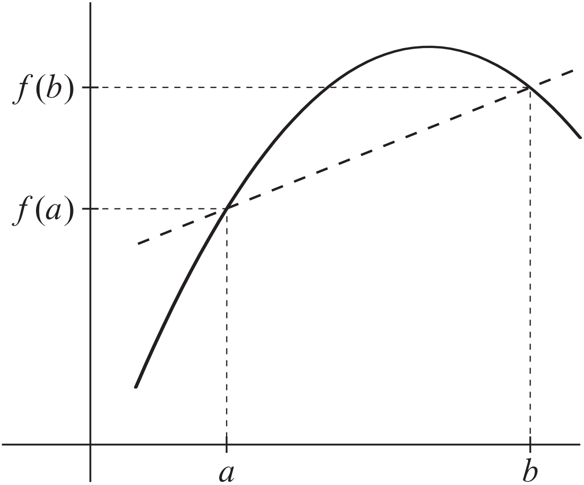
5. Derivace a elementární funkce

Isaac Newton (1643-1727)

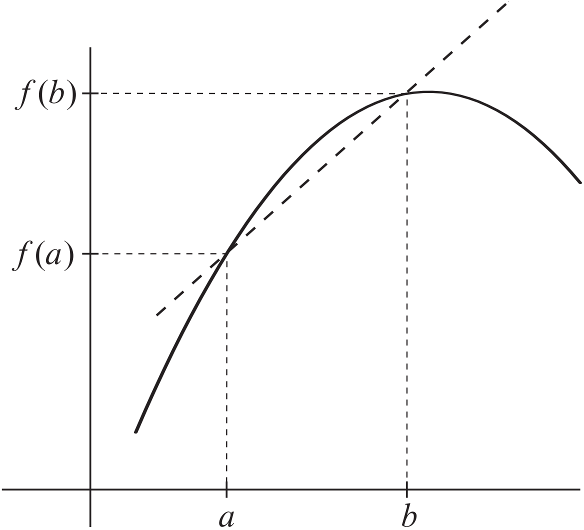


Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

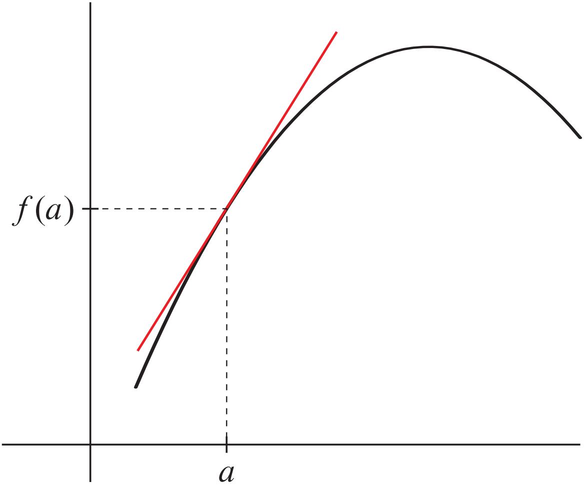
Geometrický význam derivace



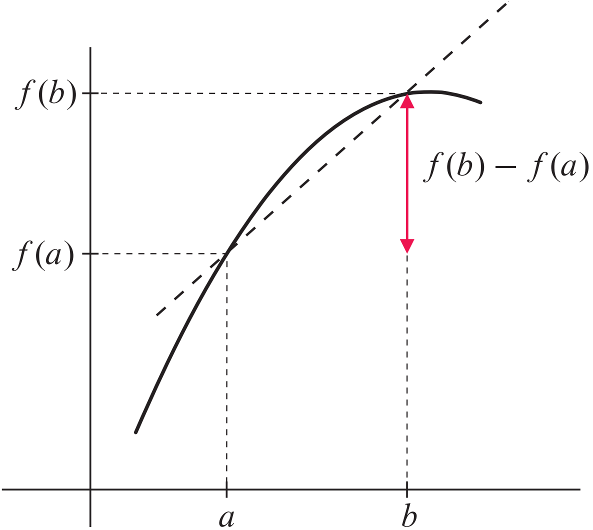
Geometrický význam derivace



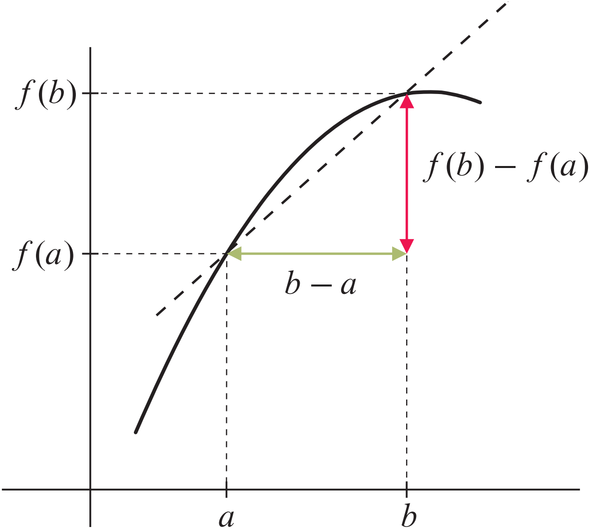
Geometrický význam derivace



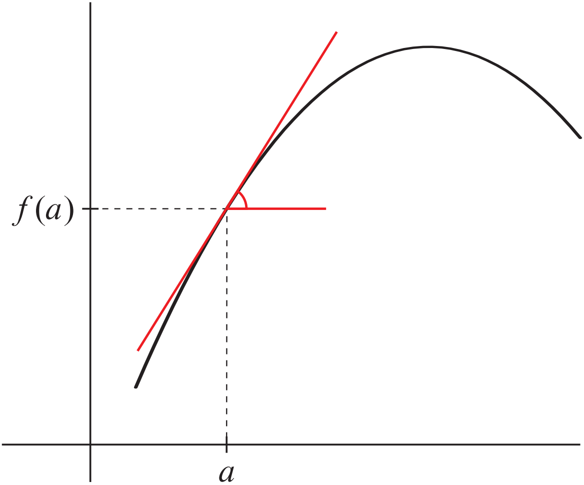
Geometrický význam derivace



Geometrický význam derivace



Geometrický význam derivace



5.1 Definice a základní vztahy

Definice

Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak

- **derivací funkce** f **v bodě** a budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

5.1 Definice a základní vztahy

Definice

Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak

- **derivací funkce** f **v bodě** a budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

- **derivací funkce** f **v bodě** a **zprava** budeme rozumět

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

analogicky definujeme **derivaci funkce** f **v bodě** a **zleva**.

Věta 5.1

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 5.2 (aritmetika derivací)

Nechť $a \in \mathbf{R}$ *a funkce* f *a* g *jsou definované na nějakém okolí bodu* a*. Nechť existují* $f'(a) \in \mathbf{R}^\star$ *a* $g'(a) \in \mathbf{R}^\star$*.*

(a) *Pak platí*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 5.2 (aritmetika derivací)

Nechť $a \in \mathbf{R}$ *a funkce* f *a* g *jsou definované na nějakém okolí bodu* a*. Nechť existují* $f'(a) \in \mathbf{R}^\star$ *a* $g'(a) \in \mathbf{R}^\star$*.*

(a) *Pak platí*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(b) *Je-li alespoň jedna z funkcí* f, g *spojitá v bodě* a*, pak*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 5.2 (aritmetika derivací)

Nechť $a \in \mathbf{R}$ a funkce f a g jsou definované na nějakém okolí bodu a. Nechť existují $f'(a) \in \mathbf{R}^\star$ a $g'(a) \in \mathbf{R}^\star$.

(a) *Pak platí*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(b) *Je-li alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a, pak*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(c) *Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 5.3 (derivace složené funkce)

Nechť funkce g je spojitá v bodě $a \in \mathbf{R}$ a má v tomto bodě derivaci. Nechť funkce f má derivaci v bodě $g(a)$. Pak

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 5.4 (derivace inverzní funkce)

Nechť I je nedegenerovaný interval a nechť a je vnitřním bodem I. Nechť f je spojitá a ryze monotónní funkce na I. Označme $b = f(a)$. Pak platí následující tvrzení.

(a) *Má-li f v bodě a nenulovou derivaci, pak*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Věta 5.4 (derivace inverzní funkce)

Nechť I je nedegenerovaný interval a nechť a je vnitřním bodem I. Nechť f je spojitá a ryze monotónní funkce na I. Označme $b = f(a)$. Pak platí následující tvrzení.

(a) *Má-li f v bodě a nenulovou derivaci, pak*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) *Je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí na I, pak $\left(f^{-1}\right)'(b) = \infty$.*

Věta 5.4 (derivace inverzní funkce)

Nechť I je nedegenerovaný interval a nechť a je vnitřním bodem I. Nechť f je spojitá a ryze monotónní funkce na I. Označme $b = f(a)$. Pak platí následující tvrzení.

(a) *Má-li f v bodě a nenulovou derivaci, pak*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) *Je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí na I, pak $\left(f^{-1}\right)'(b) = \infty$.*

(c) *Je-li $f'(a) = 0$ a f je klesající na I, pak $\left(f^{-1}\right)'(b) = -\infty$.*

Věta 5.5 (nutná podmínka lokálního extrému)

Nechť f je reálná funkce. Jestliže a je bodem lokálního extrému funkce f, potom buď $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$.

Věta 5.6 (Rolle)

Nechť funkce f má následující vlastnosti:

5.2 Věty o střední hodnotě

Věta 5.6 (Rolle)

Nechť funkce f má následující vlastnosti:

(i) *je spojitá na intervalu* $[a, b]$,

Věta 5.6 (Rolle)

Nechť funkce f má následující vlastnosti:

(i) *je spojitá na intervalu $[a, b]$,*

(ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),*

5.2 Věty o střední hodnotě

Věta 5.6 (Rolle)

Nechť funkce f má následující vlastnosti:

(i) *je spojitá na intervalu $[a, b]$,*

(ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),*

(iii) *platí, že $f(a) = f(b)$.*

5.2 Věty o střední hodnotě

Věta 5.6 (Rolle)

Nechť funkce f má následující vlastnosti:

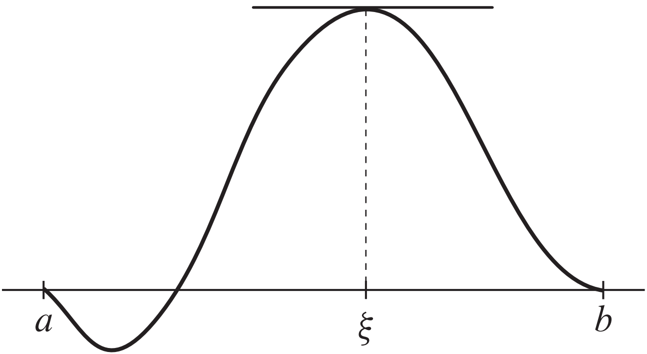
(i) *je spojitá na intervalu $[a, b]$,*

(ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),*

(iii) *platí, že $f(a) = f(b)$.*

Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f'(\xi) = 0$.

Geometrický význam Rolleovy věty



Věta 5.7 (Lagrange)

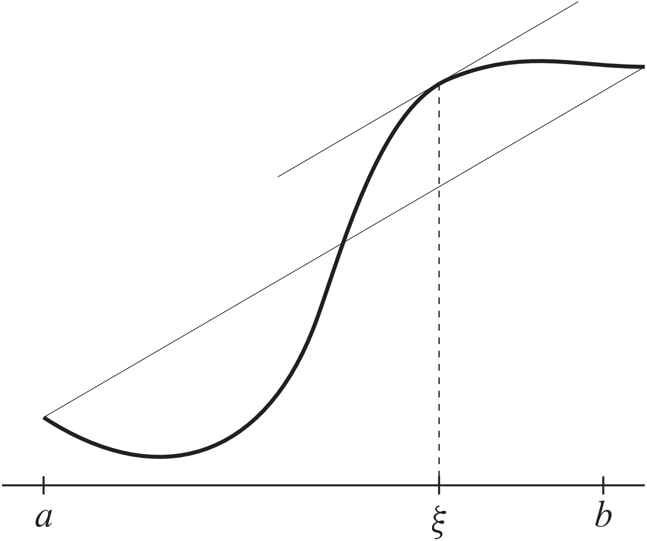
Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b).

Věta 5.7 (Lagrange)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b). Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometrický význam Lagrangeovy věty



Věta 5.8 (Cauchy)

Nechť funkce f, g jsou spojité na intervalu $[a, b]$ a takové, že f má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b) a g má v každém bodě intervalu (a, b) vlastní a nenulovou derivaci.

Věta 5.8 (Cauchy)

Nechť funkce f, g jsou spojité na intervalu $[a, b]$ a takové, že f má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b) a g má v každém bodě intervalu (a, b) vlastní a nenulovou derivaci. Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Věta 5.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

Věta 5.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

Věta 5.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ *je nedegenerovaný interval. Nechť* f *je spojitá na* J *a v každém vnitřním bodě* J *(množinu vnitřních bodů intervalu* J *označme jako* $\operatorname{int} J$*) má derivaci.*

(i) *Je-li* $f'(x) > 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$, *pak* f *je rostoucí na* J.

(ii) *Je-li* $f'(x) < 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$, *pak* f *je klesající na* J.

Věta 5.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je neklesající na J.*

Věta 5.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je neklesající na J.*

(iv) *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je nerostoucí na J.*

Věta 5.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ *je nedegenerovaný interval. Nechť* f *je spojitá na* J *a v každém vnitřním bodě* J *(množinu vnitřních bodů intervalu* J *označme jako* $\operatorname{int} J$*) má derivaci.*

(i) *Je-li* $f'(x) > 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$, *pak* f *je rostoucí na* J.

(ii) *Je-li* $f'(x) < 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$, *pak* f *je klesající na* J.

(iii) *Je-li* $f'(x) \geq 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$, *pak* f *je neklesající na* J.

(iv) *Je-li* $f'(x) \leq 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$, *pak* f *je nerostoucí na* J.

Věta 5.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ *je nedegenerovaný interval. Nechť* f *je spojitá na* J *a v každém vnitřním bodě* J *(množinu vnitřních bodů intervalu* J *označme jako* $\operatorname{int} J$*) má derivaci.*

(i) *Je-li* $f'(x) > 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$*, pak* f *je rostoucí na* J.

(ii) *Je-li* $f'(x) < 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$*, pak* f *je klesající na* J.

(iii) *Je-li* $f'(x) \geq 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$*, pak* f *je neklesající na* J.

(iv) *Je-li* $f'(x) \leq 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{int} J$*, pak* f *je nerostoucí na* J.

Věta 5.10 (l'Hospitalovo pravidlo)

(i) *Nechť* $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$, *$f$ a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje* $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Pak*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta 5.10 (l'Hospitalovo pravidlo)

(i) *Nechť* $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$, *$f$ a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje* $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Pak*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) *Nechť* $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x\to a+} |g(x)| = +\infty$, *$f$ a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje* $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Pak*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta 5.11

Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbf{R}$ a existuje $\lim_{x \to a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} f'(x).$$

Věta 5.11

Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbf{R}$ a existuje $\lim_{x\to a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a+} f'(x).$$

Definice

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$ a f má vlastní n-tou derivaci na okolí bodu a. Pak $(n+1)$**-ní derivací** funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

5.3 Konvexní a konkávní funkce

Definice

Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbf{R}$. Označme

$$T_a = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = f(a) + f'(a)(x - a)\}.$$

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ **leží pod tečnou** T_a, jestliže

$$f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že bod $[x, f(x)]$ **leží nad tečnou** T_a.

Definice

Nechť $f'(a) \in \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **inflexním bodem** funkce f, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že platí

(i) $\forall x \in (a - \delta, a) : [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a,
(ii) $\forall x \in (a, a + \delta) : [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a

nebo

(i) $\forall x \in (a - \delta, a) : [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a,
(ii) $\forall x \in (a, a + \delta) : [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a.

Věta 5.12 (nutná podmínka pro inflexi)

Nechť $a \in \mathbf{R}$ *je inflexní bod funkce* f. *Potom* $f''(a)$ *neexistuje nebo je rovna nule.*

Věta 5.12 (nutná podmínka pro inflexi)

Nechť $a \in \mathbf{R}$ *je inflexní bod funkce* f*. Potom* $f''(a)$ *neexistuje nebo je rovna nule.*

Věta 5.13 (postačující podmínka pro inflexi)

Nechť funkce f *má spojitou první derivaci na intervalu* (a, b) *a* $z \in (a, b)$*. Nechť platí:*

- $\forall x \in (a, z): \; f''(x) > 0,$
- $\forall x \in (z, b): \; f''(x) < 0.$

Potom z *je inflexním bodem funkce* f*.*

Definice

Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbf{R}$ je **konvexní na intervalu** I, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I \; \forall \lambda \in [0,1] :$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Definice

Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbf{R}$ je **konvexní na intervalu I**, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I \; \forall \lambda \in [0,1] :$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbf{R}$ je **ryze konvexní na intervalu I**, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2 \; \forall \lambda \in (0,1) :$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Lemma 5.14

Funkce f je na intervalu I konvexní, právě když

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 \colon \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Věta 5.15

Nechť f je konvexní na intervalu J a nechť $a \in \operatorname{int} J$. Pak existují $f'_+(a) \in \mathbf{R}$, $f'_-(a) \in \mathbf{R}$.

Věta 5.15

Nechť f je konvexní na intervalu J a nechť $a \in \operatorname{int} J$. Pak existují $f'_+(a) \in \mathbf{R}$, $f'_-(a) \in \mathbf{R}$.

Věta 5.16

Nechť f je konvexní na otevřeném intervalu J. Pak f je spojitá na J.

Věta 5.17

Nechť $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, $a < b$.

(i) *Jestliže* $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je ryze konvexní na* (a, b).

Věta 5.17

Nechť $f : (a, b) \to \mathbf{R}$*,* $a < b$*.*

(i) *Jestliže* $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$*, pak* f *je ryze konvexní na* (a, b)*.*

(ii) *Jestliže* $f''(x) < 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$*, pak* f *je ryze konkávní na* (a, b)*.*

Věta 5.17

Nechť $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, $a < b$.

(i) *Jestliže* $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je ryze konvexní na* (a, b).

(ii) *Jestliže* $f''(x) < 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je ryze konkávní na* (a, b).

(iii) *Jestliže* $f''(x) \geq 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je konvexní na* (a, b).

Věta 5.17

Nechť $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, $a < b$.

(i) *Jestliže* $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je ryze konvexní na* (a, b).

(ii) *Jestliže* $f''(x) < 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je ryze konkávní na* (a, b).

(iii) *Jestliže* $f''(x) \geq 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je konvexní na* (a, b).

(iv) *Jestliže* $f''(x) \leq 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je konkávní na* (a, b).

5.4 Průběh funkce

Věta 5.18

Nechť $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ *(resp.* $f''(a) < 0$*). Potom* f *má v* a *lokální minimum (resp. lokální maximum).*

Definice

Řekneme, že funkce $x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbf{R}$, je **asymptotou funkce** f v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax-b) = 0, \quad \text{(resp. } \lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax-b) = 0).$$

Definice

Řekneme, že funkce $x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbf{R}$, je **asymptotou funkce** f v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax - b) = 0, \quad \text{(resp. } \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax - b) = 0\text{)}.$$

Věta 5.19

Funkce f má v ∞ asymptotu $x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbf{R}$, právě když

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}, \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbf{R}.$$

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
3. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru“.
4. Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde funkce f je konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
6. Vypočteme asymptoty funkce.
7. Načrtneme graf funkce.