

1 Logika, množiny, zobrazení a číselné obory

1.1 Výroková a predikátová logika

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice. Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A .

| | |
|-----|----------|
| A | $\neg A$ |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Definice. Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B .

Definice. Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B .

Definice. Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A , potom platí výrok B .

Výroku A v implikaci se říká **premise**, výrok B se nazývá **závěr**.

Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A .

Definice. Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B .

(Platnost výroku) A je **nutnou a postačující podmínkou** (platnosti výroku) B .

| A | B | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|-----|-----|--------------|------------|-------------------|-----------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Výrokovou formou budeme nazývat výraz

$$A(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

z něhož vznikne výrok dosazením prvků $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_m \in M_m$ z daných množin M_1, \dots, M_m .

Definice. Nyní necht' $A(x)$, $x \in M$, je výroková forma. Výrok

Pro všechna $x \in M$ platí $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M : A(x).$$

Symbol \forall nazýváme **obecným (velkým) kvantifikátorem**.

Definice. Nyní necht' $A(x)$, $x \in M$, je výroková forma. Výrok

Existuje $x \in M$, pro které platí $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M : A(x).$$

Symbol \exists nazýváme **existenčním (malým) kvantifikátorem**.

————— Konec 1. přednášky, 1. 10. 2014 —————

1.2 Množiny a množinové operace

Definice.

- Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B . Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme $A \subset B$.
- Dvě množiny jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky.
- **Prázdnou množinou** nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označíme ji symbolem \emptyset .

Definice. Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B . Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Je-li \mathcal{A} systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a , pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

Definice. Průnikem dvou množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B . Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li dvě množiny prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Je-li \mathcal{A} neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a , které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$.

Definice. • **Rozdílem množin** A a B (značíme $A \setminus B$) nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B .

- **Kartézským součinem** množin A_1, \dots, A_n nazveme množinu všech uspořádaných n -tic

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{[a_1, a_2, \dots, a_n]; a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Věta 1.1 (de Morganova pravidla). *Necht' X je množina a \mathcal{A} je neprázdný systém množin. Pak platí*

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$$

a dále

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}.$$

1.3 Zobrazení

Definice. Necht' A a B jsou množiny. **Binární relací** mezi prvky množin A a B rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Necht' $R \subset A \times B$ je binární relace. Místo zápisu $[a, b] \in R$ někdy píšeme $a R b$. Pokud $A = B$ říkáme, že R je **relace na A** .

Definice. Necht' A a B jsou množiny a necht' $R \subset A \times B$ je binární relace. Pak relaci $R^{-1} \subset B \times A$ definovanou předpisem

$$[x, y] \in R^{-1} \Leftrightarrow [y, x] \in R$$

nazýváme **inverzní relací** k relaci R .

Definice. Necht' A a B jsou množiny. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme **zobrazením** (někdy též **funkcí**) z množiny A do množiny B , jestliže platí

$$\forall x \in A \forall y_1, y_2 \in B: (([x, y_1] \in F \wedge [x, y_2] \in F) \Rightarrow y_1 = y_2).$$

Definičním oborem zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{D}(F) = \{x \in A; \exists y \in B: [x, y] \in F\}.$$

Oborem hodnot zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{R}(F) = \{y \in B; \exists x \in A: [x, y] \in F\}.$$

Poznámka. Necht' F je zobrazení z množiny A do množiny B . Pro každé $x \in \mathcal{D}(F)$ existuje právě jedno y takové, že $[x, y] \in F$. Takové y značíme $F(x)$. **Grafem zobrazení F** rozumíme množinu $\{[x, F(x)]; x \in \mathcal{D}(F)\}$.

Označení. Necht' A a B jsou množiny. Pak symbolem $F: A \rightarrow B$ značíme fakt, že

- F je zobrazení z množiny A do množiny B ,
- A je definičním oborem F ,
- obor hodnot F je podmnožinou množiny B .

Definice. Necht' A, B jsou neprázdné množiny a $f: A \rightarrow B$.

- **Obrazem** množiny $X \subset A$ při zobrazení f se nazývá množina

$$f(X) = \{y \in B; \exists x \in X: f(x) = y\} = \{f(x); x \in X\}.$$

- **Vzorem** množiny $Y \subset B$ při zobrazení f nazveme množinu

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A; f(x) \in Y\}.$$

Definice. Necht' A a B jsou množiny a $f: A \rightarrow B$ je zobrazení.

- (a) Řekneme, že f je **prosté (injektivní)**, jestliže

$$\forall x, y \in A: (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y).$$

- (b) Řekneme, že f je **na (surjektivní)**, jestliže

$$\forall y \in B \exists x \in A: f(x) = y.$$

- (c) Řekneme, že f je **bijekce (vzájemně jednoznačné)**, jestliže je zároveň prosté a na.

————— Konec 2. přednášky, 7. 10. 2014 —————

Definice. Necht' A a B jsou množiny, $f: A \rightarrow B$ je zobrazení a $C \subset A$. Pak zobrazení $g: C \rightarrow B$ definované předpisem $g(x) = f(x)$ pro $x \in C$ nazýváme **restrikcí (zúžením** nebo **parcializací)** zobrazení f na množinu C . Zobrazení g označujeme symbolem $f|_C$.

Definice. Necht' f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ taková, že $f(x) \in \mathcal{D}(g)$. Zobrazení $g \circ f$ nazýváme **složeným zobrazením (složením zobrazení)** f a g , přičemž g nazýváme **vnějším** zobrazením a f nazýváme **vnitřním** zobrazením.

Definice. Necht' A a B jsou množiny a $f: A \rightarrow B$ je prosté zobrazení. Pak **inverzní zobrazení** k f je definováno jako inverzní relace k f . Inverzní zobrazení k f značíme f^{-1} .

1.4 Mohutnost množin

Definice.

- Říkáme, že množiny A, B **mají stejnou mohutnost** a píšeme $A \approx B$, jestliže existuje bijekce A na B .
- Říkáme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B a píšeme $A \preceq B$, jestliže existuje prosté zobrazení A do B .
- Symbol $A \prec B$ značí situaci, kdy $A \preceq B$ a neplatí $A \approx B$.

Definice. Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1, \dots, n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, pokud není konečná. Řekneme, že množina X je **spočetná**, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako \mathbb{N} . Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Poznámka. Pro počet prvků konečné množiny X používáme často značení $|X|$. Dvě konečné množiny X, Y mají stejnou mohutnost právě tehdy, když $|X| = |Y|$.

Věta 1.2 (Cantor–Bernstein). *Necht' A, B jsou množiny takové, že $A \preceq B$ a zároveň $B \preceq A$. Pak A a B mají stejnou mohutnost.*

Definice. Necht' X je množina. Potom **potenční množinou** množiny X rozumíme množinu $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin množiny X .

Věta 1.3 (Cantor). *Necht' X je množina. Pak $X \prec \mathcal{P}(X)$.*

Věta 1.4 (vlastnosti spočetných množin).

- (a) *Podmnožina spočetné množiny je spočetná.*
- (b) *Necht' zobrazení $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ je prosté. Potom je množina A spočetná.*
- (c) *Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.*
- (d) *Obraz spočetné množiny je spočetná množina.*
- (e) *Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.*

1.5 Reálná čísla

Množinu reálných čísel \mathbb{R} lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** (\leq), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

- I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah
- II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení
- III. Axiom suprema

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z$ (**asociativita sčítání**),
- $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$ (**komutativita sčítání**),
- $\exists w \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : w + x = x$ (prvek w je určen jednoznačně, značíme ho 0 a říkáme mu **nulový prvek**),

- $\forall x \in \mathbf{R} \exists z \in \mathbf{R} : x + z = 0$ (z je tzv. **opačné číslo** k číslu x , je určeno jednoznačně a značíme ho $-x$),
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R} : x \cdot y = y \cdot x$ (**komutativita násobení**),
- $\exists v \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \forall x \in \mathbf{R} : v \cdot x = x$ (prvek v je určen jednoznačně, značíme ho 1 a říkáme mu **jednotkový prvek**),
- $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbf{R} : x \cdot y = 1$ (prvek y je určen jednoznačně a značíme ho x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R} : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (**distributivita**).

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R} : (x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (**tranzitivita**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R} : (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$ (**slabá antisymetrie**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R} : x \leq y \vee y \leq x$,
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R} : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
- $\forall x, y \in \mathbf{R} : (0 \leq x \wedge 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$.

Označení.

- Označení $x \geq y$ znamená totéž co $y \leq x$. Symbolem $x < y$ budeme značit situaci, kdy $x \leq y$, ale $x \neq y$ (tzv. **ostrá nerovnost**).
- Reálná čísla, pro něž $x > 0$ (resp. $x < 0$), budeme nazývat **kladnými** (resp. **zápornými**).
- Reálná čísla, pro něž $x \geq 0$ (resp. $x \leq 0$), budeme nazývat **nezápornými** (resp. **nekladnými**).

————— Konec 3. přednášky, 9. 10. 2014 —————

Definice.

- Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená zdola**, jestliže existuje číslo $a \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$.
Takové číslo a se nazývá **dolní závora** množiny M .
- Analogicky definujeme pojmy **množina omezená shora** a **horní závora**.
- Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Definice. Necht' $M \subset \mathbf{R}$. Číslo $G \in \mathbf{R}$ splňující

- $\forall x \in M : x \leq G$,
- $\forall G' \in \mathbf{R}, G' < G \exists x \in M : x > G'$,

nazýváme **supremem** množiny M .

Poznámka. Necht' $M \subset \mathbf{R}$. Má-li množina M supremum, je toto určeno jednoznačně a značíme jej $\sup M$.

Definice. Necht' $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **největší prvek (maximum)** množiny M , jestliže $a \in M$ a a je horní závorou množiny M . Analogicky definujeme **nejmenší prvek (minimum)** M . Maximum a minimum jsou určeny jednoznačně (pokud existují) a značíme je $\max M$ a $\min M$.

III. Axiom suprema

- Každá neprázdná shora omezená podmnožina \mathbf{R} má supremum.

Věta 1.5. Existuje čtveřice $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ splňující podmínky I–III, přičemž je těmito podmínkami určena jednoznačně v následujícím smyslu. Pokud čtveřice $(\tilde{\mathbf{R}}, \oplus, \odot, \leq^*)$ splňuje mutatis mutandis podmínky I–III, pak existuje bijekce $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \tilde{\mathbf{R}}$ taková, že pro každé $x, y \in \mathbf{R}$ platí

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$,
- $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$,
- $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq^* \varphi(y)$.

Definice. Necht' $M \subset \mathbf{R}$. Číslo $g \in \mathbf{R}$ splňující

- $\forall x \in M : x \geq g$,
- $\forall g' \in \mathbf{R}, g' > g \exists x \in M : x < g'$,

nazýváme **infimem** množiny M .

Poznámka. Necht' $M \subset \mathbf{R}$. Má-li množina M infimum, je toto určeno jednoznačně a značíme jej $\inf M$.

Věta 1.6. Necht' $M \subset \mathbf{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje infimum množiny M .

Věta 1.7. Pro každé $r \in \mathbf{R}$ existuje právě jedno číslo $k \in \mathbf{Z}$ takové, že $k \leq r < k + 1$.

————— Konec 4. přednášky, 14. 10. 2014 —————

Věta 1.8. Ke každému $x \in \mathbf{R}$ existuje $n \in \mathbf{N}$ splňující $x < n$.

Věta 1.9. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ a $x \in \mathbf{R}, x \geq 0$, existuje právě jedno $y \in \mathbf{R}, y \geq 0$, splňující $y^n = x$.

Věta 1.10. Necht' $a, b \in \mathbf{R}, a < b$. Pak existuje $q \in \mathbf{Q}$ takové, že $a < q < b$.

1.6 Komplexní čísla

Množinu komplexních čísel \mathbf{C} definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic (a, b) , kde $a, b \in \mathbf{R}$, přičemž pro komplexní čísla $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ definujeme operace **sčítání** a **násobení** takto

- $x + y = (a + c, b + d)$,
- $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$.

Necht' $x = (a, b) \in \mathbf{C}$. Prvek a nazýváme **reálnou částí** x , prvek b nazýváme **imaginární částí** x . **Absolutní hodnotou** komplexního čísla x rozumíme $\sqrt{a^2 + b^2}$. Dále definujeme $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$ (sic!) a $i = (0, 1)$. **Komplexně sdruženým číslem** k x rozumíme číslo $\bar{x} = (a, -b)$; symbol $-x$ značí číslo $(-a, -b)$ a symbol $1/x$ značí pro $x \neq 0$ (jednoznačně určené) číslo splňující $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

2 Limita posloupnosti

2.1 Úvod

Definice. Zobrazení přiřazující každému přirozenému číslu n reálné číslo a_n nazýváme **posloupnost** reálných čísel. Značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Číslo a_n nazveme **n -tým členem** této posloupnosti.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, pokud je rostoucí či klesající.

2.2 Konvergence posloupnosti

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má **limitu** rovnou reálnému číslu A , jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon.$$

————— Konec 5. přednášky, 16. 10. 2014 —————

Věta 2.1 (jednoznačnost limity). *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Definice. Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu rovnou číslu $A \in \mathbf{R}$, pak píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **konvergentní**, pokud existuje $A \in \mathbf{R}$ takové, že $\lim a_n = A$.

Věta 2.2. *Necht' $K \in \mathbf{R}, K > 0, A \in \mathbf{R}$. Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ splňuje podmínku*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < K\varepsilon.$$

potom $\lim a_n = A$.

Věta 2.3. Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Definice. Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá **vybranou posloupností z** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta 2.4. Necht' $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jestliže platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, pak také $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace). Necht' $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. Potom platí:

- (a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,
- (b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,
- (c) je-li $B \neq 0$ a $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, je $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Věta 2.6. Necht' $\lim a_n = 0$ a necht' posloupnost $\{b_n\}$ je omezená. Potom $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 2.7. Necht' $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$. Potom $\lim |a_n| = |A|$.

Věta 2.8 (limita a uspořádání). Necht' $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$.

- (a) Necht' existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé přirozené $n \geq n_0$ je $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.
- (b) Necht' $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé přirozené $n \geq n_0$ je $a_n < b_n$.

Věta 2.9 (o dvou strážnících). Necht' $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou dvě konvergentní posloupnosti a $\{c_n\}$ je posloupnost splňující:

- (a) $\exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$,
- (b) $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom existuje $\lim c_n$ a platí $\lim c_n = \lim a_n$.

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu ∞ , jestliže

$$\forall L \in \mathbf{R} \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : a_n \geq L.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$, jestliže

$$\forall K \in \mathbf{R} \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : a_n \leq K.$$

Věta 2.10 (jednoznačnost limity podruhé). *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu v \mathbf{R}^* .*

Věta 2.11 (aritmetika limit podruhé). *Necht' $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^*$ a $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^*$. Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$, *pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je pravá strana definována,*

(iii) $\lim a_n/b_n = A/B$, *pokud je pravá strana definována.*

Věta 2.12. *Necht' $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^*$, $A > 0$, $\lim b_n = 0$ a existuje $n_0 \in \mathbf{N}$, že pro každé $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n > 0$. Pak $\lim a_n/b_n = \infty$.*

Definice. *Necht' $M \subset \mathbf{R}^*$. Číslo $G \in \mathbf{R}^*$ splňující*

- $\forall x \in M : x \leq G$,
- $\forall G' \in \mathbf{R}^*, G' < G \exists x \in M : x > G'$,

*nazýváme **supremem** množiny M . **Infimum** množiny M definujeme analogicky.*

2.4 Hlubší věty o limitě posloupnosti

Věta 2.13. *Každá monotónní posloupnost má limitu.*

Věta 2.14 (Cantorův princip vložených intervalů). *Necht' $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost uzavřených intervalů splňující:*

- $\forall n \in \mathbf{N} : I_{n+1} \subset I_n$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{délka } I_n = 0$.

Potom $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ je jednobodová množina.

Věta 2.15 (Bolzanova-Weierstrassova věta). *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Definice. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } \{a_n\} \\ & \text{shora omezená,} \\ \infty, & \text{jestliže není } \{a_n\} \\ & \text{shora omezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}$. Obdobně definujeme **limes inferior** posloupnosti $\{a_n\}$ předpisem

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } \{a_n\} \\ & \text{zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{jestliže není } \{a_n\} \\ & \text{zdola omezená.} \end{cases}$$

Věta 2.16 (o vztahu limity, limes superior a limes inferior). *Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbf{R}^*$. Potom $\lim a_n = A$ právě tehdy, když $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.*

Věta 2.17. *Necht' $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $n_0 \in \mathbf{N}$ a platí $a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}, n \geq n_0$. Pak platí*

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n \text{ a } \limsup a_n \leq \limsup b_n.$$

Definice. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbf{R}^*$. Řekneme, že A je **hromadná hodnota** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H(\{a_n\})$.

Věta 2.18 (o vztahu limes superior, limes inferior a hromadných hodnot). *Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ jsou hromadnými hodnotami posloupnosti $\{a_n\}$ a pro každou hromadnou hodnotu A posloupnosti $\{a_n\}$ platí $\liminf a_n \leq A \leq \limsup a_n$.*

————— Konec 11. přednášky, 13. 11. 2014 —————

Důsledek 2.19. *Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a necht' $A \in \mathbf{R}^*$. Je-li $\lim a_n = A$, pak $H(\{a_n\}) = \{A\}$.*

Definice. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ splňuje **Bolzanovu–Cauchyovu podmínku**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \\ \forall m, n \in \mathbf{N}, n \geq n_0, m \geq n_0: |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Věta 2.20. *Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku.*

Věta 2.21 (Borelova věta). *Necht' I je uzavřený interval a \mathcal{S} je množina otevřených intervalů taková, že $I \subset \bigcup \mathcal{S}$. Potom existuje konečná množina $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ taková, že $I \subset \bigcup \mathcal{S}_0$.*

3 Číselné řady

3.1 Základní pojmy

Definice. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položeme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme **m -tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat **n -tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada **konverguje**, je-li její součet reálné číslo. V opačném případě řekneme, že řada **diverguje**.

————— Konec 12. přednášky, 18. 11. 2014 —————

Věta 3.1 (nutná podmínka konvergence řady). *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim a_n = 0$.*

Věta 3.2. (i) *Necht' $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ konverguje.*

(ii) *Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní řady. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ konverguje.*

(iii) *Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když platí*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0$$

$$\forall m \in \mathbf{N}, m > n: \left| \sum_{j=n+1}^m a_j \right| < \varepsilon.$$

3.2 Řady s nezápornými členy

Věta 3.3 (srovnávací kritérium). *Necht' $n_0 \in \mathbf{N}$. Dále necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady splňující $0 \leq a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$.*

(i) *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, je rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*

(ii) *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, je rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní.*

Věta 3.4 (limitní srovnávací kritérium). *Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = c \in \mathbf{R}^*$.*

(i) *Necht' $c \in (0, \infty)$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

(ii) *Necht' $c = 0$. Pak konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

(iii) *Necht' $c = \infty$. Pak konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Věta 3.5 (Cauchyovo odmocninové kritérium). *Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Potom platí:*

(i) *Existuje-li $q \in (0, 1)$ takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(ii) *Je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*

(iii) *Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*

(iv) *Je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak neplatí $\lim a_n = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.*

(v) *Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak neplatí $\lim a_n = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.*

Věta 3.6 (d'Alembertovo podílové kritérium). *Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.*

(i) *Existuje-li $q \in (0, 1)$ takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(ii) *Je-li $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*

(iii) *Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*

(iv) *Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak neplatí $\lim a_n = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.*

Věta 3.7 (Raabeovo kritérium). *Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.*

(i) *Je-li $\lim n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*

(ii) *Je-li $\lim n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.*

Věta 3.8. *Necht' $\alpha \in \mathbf{R}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.*

Věta 3.9 (kondenzační kritérium). *Necht' $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.*

3.3 Řady s obecnými členy

Lemma 3.10 (Abelova parciální sumace). *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$ jsou reálná čísla.*

(a) *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, a $\sigma_k = \sum_{j=n}^k a_j$, $k = n, \dots, m$. Pak platí*

$$\sum_{j=n}^m a_j b_j = \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) + \sigma_m b_m.$$

(b) *Označme $s_k = \sum_{j=1}^k a_j$, $k = 0, \dots, m$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, platí*

$$\sum_{j=n}^m a_j b_j = -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m.$$

————— Konec 14. přednášky, 25. 11. 2014 —————

Věta 3.11 (Abelovo-Dirichletovo kritérium). *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, přičemž $\{b_n\}$ je monotónní. Nechť je navíc splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:*

(A) *posloupnost $\{b_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,*

(D) *$\lim b_n = 0$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je omezená.*

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Věta 3.12 (Leibniz). *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní posloupnost, která konverguje k 0. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.*

3.4 Absolutní konvergence

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, ale není absolutně konvergentní, říkáme, že je **neabsolutně konvergentní**.

Věta 3.13. *Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, je rovněž konvergentní.*

4 Limita a spojitost funkce

4.1 Základní pojmy

Definice. Funkce f jedné reálné proměnné (dále jen **funkce**) je zobrazení $f: M \rightarrow \mathbf{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice. Funkce $f: J \rightarrow \mathbf{R}$ je **rostoucí** na intervalu J , jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Analogicky definujeme funkci **klesající (neklesající, nerostoucí)** na intervalu J .

Definice. **Monotónní funkcí** (resp. **ryze monotónní funkcí**) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na J .

Definice. Necht' f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická s periodou** $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $x+a \in D_f$, $x-a \in D_f$ a $f(x+a) = f(x-a) = f(x)$,
- **shora omezená** na M , jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- **zdola omezená** na M , jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- **omezená** na M , jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,
- **konstantní** na M , jestliže pro všechna $x, y \in M$ platí $f(x) = f(y)$.

4.2 Limita funkce

Definice. Necht' $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
- **prstencové okolí bodu** c jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$,

Okolí a prstencové okolí bodu ∞ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

$$P(\infty, \varepsilon) = B(\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, \infty),$$
$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

Definice. Řekneme, že číslo $A \in \mathbf{R}^*$ je **limitou funkce f v bodě $c \in \mathbf{R}^*$** , jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \forall x \in P(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

To označujeme symbolem $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$.

Definice. Necht' $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu c** jako $B^+(c, \varepsilon) = [c, c + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu c** jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c]$,
- **pravé prstencové okolí bodu c** jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu c** jako $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$.

Definice. Dále definujeme

- **levé okolí bodu ∞** jako $B^-(\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, \infty)$,
- **pravé okolí bodu $-\infty$** jako $B^+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu ∞** jako $P^-(\infty, \varepsilon) = B^-(\infty, \varepsilon)$,
- **pravé prstencové okolí bodu $-\infty$** jako $P^+(-\infty, \varepsilon) = B^+(-\infty, \varepsilon)$.

Definice. Necht' $A \in \mathbf{R}^*$, $c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A (značíme $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \forall x \in P^+(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Pro limitu zleva funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$.

Definice. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě c** , jestliže $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

————— Konec 15. přednášky, 27. 11. 2014 —————

Definice. Necht' $c \in \mathbf{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá zprava** (resp. **zleva**), jestliže $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$).

Definice. Necht' $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f: J \rightarrow \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu J** , jestliže platí:

- f je spojité zprava v levém krajním bodě intervalu J , pokud tento bod patří do J ,
- f je spojité zleva v pravém krajním bodě intervalu J , pokud tento bod patří do J ,
- f je spojité v každém vnitřním bodě J .

4.3 Věty o limitách

Věta 4.1. Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

Věta 4.2. Necht' funkce f má vlastní limitu v bodě $c \in \mathbf{R}^*$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že f je na $P(c, \delta)$ omezená.

Věta 4.3 (aritmetika limit). Necht' $c \in \mathbf{R}^*$. Necht' $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbf{R}^*$ a $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = B \in \mathbf{R}^*$. Potom platí:

- (i) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = A + B$, pokud je výraz $A + B$ definován,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = AB$, pokud je výraz AB definován,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)/g(x) = A/B$, pokud je výraz A/B definován.

————— Konec 16. přednášky, 2. 12. 2014 —————

Věta 4.4. Necht' $c \in \mathbf{R}^*$. Necht' $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbf{R}^*$ a $A > 0$. Jestliže existuje $\eta > 0$ takové, že funkce g je kladná na $P(c, \eta)$, pak $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)/g(x)) = \infty$.

Věta 4.5 (limita funkce a uspořádání). Mějme $c \in \mathbf{R}^*$.

(i) Necht'

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) > \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

Pak existuje prstencové okolí $P(c, \delta)$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta) : f(x) > g(x).$$

(ii) Necht' existuje prstencové okolí $P(c, \delta)$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta) : f(x) \leq g(x).$$

Necht' existují $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$. Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

(iii) (o dvou strážnících) Necht' na nějakém prstencovém okolí $P(c, \delta)$ platí

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Necht' $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$. Potom existuje rovněž $\lim_{x \rightarrow c} h(x)$ a všechny tři limity jsou si rovny.

Věta 4.6. Necht' $c, D, A \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = D$, $\lim_{y \rightarrow D} f(y) = A$ a je splněna alespoň jedna z podmínek

(P) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0 \forall x \in P(c, \eta) : g(x) \neq D,$

(S) f je spojitá v D .

Potom $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = A$.

————— Konec 17. přednášky, 4. 12. 2014 —————

Věta 4.7 (Heine). *Necht' $c \in \mathbf{R}^*, A \in \mathbf{R}^*$ a funkce f je definována na prstencovém okolí bodu c . Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.*

(i) Platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$.

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f), x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Věta 4.8 (limita monotónní funkce). *Necht' $a, b \in \mathbf{R}^*, a < b$, a funkce f je monotónní na intervalu (a, b) . Potom existují $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$, přičemž platí:*

(a) Je-li f na (a, b) neklesající, pak

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \inf f((a, b)) \quad a \quad \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \sup f((a, b)).$$

(b) Je-li f na (a, b) nerostoucí, pak

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \sup f((a, b)) \quad a \quad \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \inf f((a, b)).$$

————— Konec 18. přednášky, 9. 12. 2014 —————

4.4 Funkce spojité na intervalu

Věta 4.9 (Bolzano). *Necht' funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a předpokládejme, že $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f(\xi) = C$.*

Lemma 4.10. *Necht' $M \subset \mathbf{R}$ a platí*

$$\forall x, y \in M \forall z \in \mathbf{R} : x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

Pak M je interval.

Věta 4.11 (zobrazení intervalu spojitou funkcí). *Necht' J je nedegenerovaný interval. Necht' funkce $f : J \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá na J . Potom je $f(J)$ interval.*

Věta 4.12. *Necht' f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom je f na $[a, b]$ omezená.*

Definice. Necht' $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) na M , jestliže platí

$$\forall y \in M: f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M: f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce f na množině M . Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

Definice. Necht' $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že funkce f má v bodě x

- **lokální maximum vzhledem k M** , jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M: f(y) \leq f(x)$,
- **lokální minimum vzhledem k M** , jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M: f(y) \geq f(x)$,

Věta 4.13. Necht' f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$, kde $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Potom funkce f nabývá na $[a, b]$ své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).

Věta 4.14 (o inverzní funkci). Necht' f spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J . Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.

5 Derivace a elementární funkce

5.1 Definice a základní vztahy

Definice. Necht' f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak

- **derivací funkce f v bodě a** budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

- **derivací funkce f v bodě a zprava** budeme rozumět

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

analogicky definujeme **derivaci funkce f v bodě a zleva**.

Věta 5.1. Necht' funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 5.2 (aritmetika derivací). Necht' $a \in \mathbf{R}$ a funkce f a g jsou definované na nějakém okolí bodu a . Necht' existují $f'(a) \in \mathbf{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbf{R}^*$.

- (a) Pak platí

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

- (b) Je-li alespoň jedna z funkcí f , g spojitá v bodě a , pak

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

- (c) Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 5.3 (derivace složené funkce). Necht' funkce g je spojitá v bodě $a \in \mathbf{R}$ a má v tomto bodě derivaci. Necht' funkce f má derivaci v bodě $g(a)$. Pak

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 5.4 (derivace inverzní funkce). *Necht' I je nedegenerovaný interval a necht' a je vnitřním bodem I . Necht' f je spojitá a ryze monotónní funkce na I . Označme $b = f(a)$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) *Má-li f v bodě a nenulovou derivaci, pak*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) *Je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí na I , pak $(f^{-1})'(b) = \infty$.*

(c) *Je-li $f'(a) = 0$ a f je klesající na I , pak $(f^{-1})'(b) = -\infty$.*

Věta 5.5 (nutná podmínka lokálního extrému). *Necht' f je reálná funkce. Jestliže a je bodem lokálního extrému funkce f , potom buď $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$.*

5.2 Věty o střední hodnotě

Věta 5.6 (Rolle). *Necht' funkce f má následující vlastnosti:*

- (i) *je spojitá na intervalu $[a, b]$,*
- (ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) ,*
- (iii) *platí, že $f(a) = f(b)$.*

Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f'(\xi) = 0$.

Věta 5.7 (Lagrange). *Necht' funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b) . Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta 5.8 (Cauchy). *Necht' funkce f, g jsou spojitě na intervalu $[a, b]$ a takové, že f má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b) a g má v každém bodě intervalu (a, b) vlastní a nenulovou derivaci. Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Věta 5.9 (vztah derivace a monotonie). *Necht' $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Necht' f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\text{int } J$) má derivaci.*

- (i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \text{int } J$, pak f je rostoucí na J .*
- (ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \text{int } J$, pak f je klesající na J .*
- (iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \text{int } J$, pak f je neklesající na J .*
- (iv) *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \text{int } J$, pak f je nerostoucí na J .*

Věta 5.10 (l'Hospitalovo pravidlo). (i) *Necht' $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$, f a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) *Necht' $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x \rightarrow a^+} |g(x)| = +\infty$, f a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta 5.11. *Necht' f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbf{R}$ a existuje $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost*

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x).$$

Definice. *Necht' $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$ a f má vlastní n -tou derivaci na okolí bodu a . Pak $(n + 1)$ -ní derivací funkce f v bodě a budeme rozumět*

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

5.3 Konvexní a konkávní funkce

Definice. *Necht' f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbf{R}$. Označme*

$$T_a = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; y = f(a) + f'(a)(x - a)\}.$$

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ **leží pod tečnou** T_a , jestliže

$$f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že bod $[x, f(x)]$ **leží nad tečnou** T_a .

Definice. Necht' $f'(a) \in \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **inflexním bodem** funkce f , jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že platí

(i) $\forall x \in (a - \delta, a) : [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a ,

(ii) $\forall x \in (a, a + \delta) : [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a

nebo

(i) $\forall x \in (a - \delta, a) : [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a ,

(ii) $\forall x \in (a, a + \delta) : [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a .

Věta 5.12 (nutná podmínka pro inflexi). *Necht' $a \in \mathbf{R}$ je inflexní bod funkce f . Potom $f''(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.*

Věta 5.13 (postačující podmínka pro inflexi). *Necht' funkce f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b) a $z \in (a, b)$. Necht' platí:*

• $\forall x \in (a, z) : f''(x) > 0$,

• $\forall x \in (z, b) : f''(x) < 0$.

Potom z je inflexním bodem funkce f .

Definice. Řekneme, že funkce $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ je **konvexní na intervalu I** , jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I \forall \lambda \in [0, 1]: f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Řekneme, že funkce $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ je **ryze konvexní na intervalu I** , jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2 \forall \lambda \in (0, 1): f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Lemma 5.14. *Funkce f je na intervalu I konvexní, právě když*

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3: \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Věta 5.15. *Necht' f je konvexní na intervalu J a necht' $a \in \text{int } J$. Pak existují $f'_+(a) \in \mathbf{R}$, $f'_-(a) \in \mathbf{R}$.*

Věta 5.16. *Necht' f je konvexní na otevřeném intervalu J . Pak f je spojitá na J .*

Věta 5.17. *Necht' $f: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$, $a < b$.*

(i) *Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b) .*

(ii) *Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b) .*

(iii) *Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b) .*

(iv) *Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konkávní na (a, b) .*

5.4 Průběh funkce

Věta 5.18. Necht' $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ (resp. $f''(a) < 0$). Potom f má v a lokální minimum (resp. lokální maximum).

Definice. Řekneme, že funkce $x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, je **asymptotou funkce** f v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0, \quad (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0).$$

Věta 5.19. Funkce f má v ∞ asymptotu $x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, právě když

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbf{R}.$$

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicitu.
3. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru“.
4. Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde funkce f je konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
6. Vypočteme asymptoty funkce.
7. Načrtneme graf funkce.