1. Opakování středoškolské látky

1. Řešte následující nerovnice v $\mathbf{R}$:

$$\frac{x-2}{2x-8} \geq 1, \qquad \log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+3) \geq 0, \qquad \frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}.$$

2. Nakreslete graf funkce $f(x) = \Big|\Big|\big||x|-1\big|-1\Big|-1\Big|,\ x \in \mathbf{R}$.

3. Řešte rovnice v $\mathbf{R}$:

$$\sin 2x = \sin x, \quad 2\sin x + \cos x = 1, \quad \log(x^2+1) = 2\log(3-x).$$

4. Dokažte následující vztahy:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2.$$

5. Dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbf{R}$ platí $|a+b| \leq |a|+|b|$ a $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$.

6. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ dokažte, že platí $n \leq 2^n$.

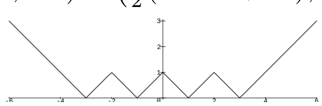
7. Pro každé $n \in \mathbf{N}, n \neq 3$, dokažte, že platí $n^2 \leq 2^n$.

8. Vyjádřete funkce $\cos 5x$ a $\sin 5x$ pomocí funkcí $\cos x$ a $\sin x$.

9. Pro libovolné $n \in \mathbf{N}$ a $x \in \mathbf{R}$ sečtěte výraz $\sin x + \cdots + \sin nx$.

Výsledky a návody

1. $(4,6\rangle;\ \langle 1,2\rangle;\ (-6,-3) \cup \left(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{13}), \frac{1}{2}(-1+\sqrt{13})\right)$

2. Obrázek grafu 

3. 1. rovnice: $x = k\pi$ nebo $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbf{Z}$; 2. rovnice: $x = 2k\pi$ nebo $x = \pi - \arcsin(4/5) + 2k\pi$, kde $k \in \mathbf{Z}$; 3. rovnice: $4/3$ **4.** Použijte matematickou indukci. **5.** První nerovnost dokažte užitím vhodné definice absolutní hodnoty nebo provedením diskuse znamének členů v absolutních hodnotách. Druhou nerovnost odvoďte z první. **8.** Použijte Moivreovu větu nebo součtové vzorce. Výsledek: $\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x$ a $\sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$. **9.** Vhodným použitím Moivreovy věty a vzorce pro součet geometrické řady dostaneme:

$$\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(x/2)} \qquad \text{pro } x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Pokud $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, pak je součet roven nule.