4. Supremum a infimum množin

1. Nechť má množina $M \subset \mathbf{R}$ maximum. Pak má i supremum, které je rovno jejímu maximu.

2. Nechť $x, y \in \mathbf{R}$ a $A = \{x, y\}$. Pak existuje maximum i minimum množiny A.

3. Nalezněte suprema a infima následujících množin (pokud existují):

- $A = \{p/(p+q);\ p \in \mathbf{N},\ q \in \mathbf{N}\}$,
- $B = \{\sin x;\ x \in [0, 2\pi]\}$,
- $C = \{n^2 - m^2;\ n \in \mathbf{N},\ m \in \mathbf{N}\}$,
- $D = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbf{N}\}$,
- $E = \{5^{(-1)^j 3^k};\ j \in \mathbf{Z},\ k \in \mathbf{Z}\}$.

4. Nechť $A \subset \mathbf{N}$ je neprázdná množina. Potom existuje minimum množiny A.

5. Nechť M je neprázdná množina a $f\colon M \to \mathbf{R}$ a $g\colon M \to \mathbf{R}$ jsou funkce.

(a) Jestliže f a g jsou shora omezené, potom

$$\sup(f+g)(M) \leq \sup f(M) + \sup g(M).$$

(b) Jestliže f a g jsou zdola omezené, potom

$$\inf(f+g)(M) \geq \inf f(M) + \inf g(M).$$