Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 2

LS 2014-15, verze D, 10. 6. 2015

---

1. Napište Taylorův polynom $T_4^{f,0}$, kde

$$f(x) = \sin(\sin(x)) - \sin(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

a spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x)) - \sin(x)}{\arcsin(x) - \operatorname{arctg}(x)}.$$

(15 bodů)

2. Spočtěte primitivní funkci

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\,\mathrm{d}x.$$

(15 bodů)

3. Vyšetřete konvergenci následujícího integrálu.

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} \cdot \min\left\{\sqrt{x-1}, 1\right\} \mathrm{d}x$$

(15 bodů)

4. Nechť $F = (F_1, F_2)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x,y,z) = \big((x+1)(y+1)^2(z+1)^3, \sin x \cdot \cos(y+2z)\big).$$

Zobrazení $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ má v bodě $(1,0)$ derivaci reprezentovanou maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Ukažte, že v bodě $(0,0,0)$ existuje derivace zobrazení $G \circ F$ a spočtěte její reprezentující matici.

(b) Spočtěte derivaci funkce F_1 v bodě $(0,0,0)$ podle vektoru $(2,0,1)$.

(15 bodů)